

Wk: nicht-relativist. Energie-Impuls-Relation
 $E = \frac{p^2}{2m}$ (freies Teilchen)

$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$ Korrespondenzregel
 \Rightarrow SG $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$

relativistisch: $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$

quadratisch: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

Korrespondenzregel $(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})^2 \psi = (m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta) \psi$

mit $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ d'Alembert-Operator
 (andere Vorzeichen als in Notiz)

$\Rightarrow \left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\underline{r}, t) = 0$

Klein-Gordon-Gl. (KG-Gl.)

in Viererschreibweise

$\square = + \partial^\mu \partial_\mu = + \partial_\mu \partial^\mu$

mit $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$

Korrekturen zum letzten VL!!

d) Erfüllung der Kontinuitätsgleichung

Max. EDyn: $\frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}, t) = 0$ ✓

SG: $\rho(\underline{r}, t) \rightarrow \psi^*(\underline{r}, t) \psi(\underline{r}, t) = |\psi|^2$

erhalten die Kontinuitätsgleichung $\underline{j}(\underline{r}, t) \Rightarrow \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$
 Aufenthaltswahrsch. Wahrsch. Strom

Frage: Erfüllt auch die KG-Gl. die Kontinuitätsgleichung?

Ausgangspunkt: $(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}) \psi = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu \partial^\mu \psi = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi$
 multipliziere mit ψ^*

$\Rightarrow \psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi$ (1)

Eine zweite Gl. erhält man, indem man die KG-Gl. komplex konjugiert

$\partial_\mu \partial^\mu \psi^* = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi^*$ multipliziere mit ψ

$\psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^* = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi \psi^*$ (2)

(1) - (2) $\Rightarrow \psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi - \psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^* = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} (\psi^* \psi - \psi \psi^*) = 0$

benutze inverse Kettenregel zum Verändern der Ableitung:

$$\partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi) - (\partial_\mu \psi^*) (\partial^\mu \psi) - \partial_\mu (\partial^\mu \psi^*) \psi + (\partial^\mu \psi^*) \partial_\mu \psi = 0$$

es gilt: $(\partial_\mu \psi^*) (\partial^\mu \psi) = (\partial^\mu \psi^*) (\partial_\mu \psi)$
 2. und 4. Term auf der linken Seite heben sich auf!

$$\Rightarrow \partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi) - \partial_\mu (\partial^\mu \psi^*) \psi = 0$$

~~Er~~ Erinnerung:
 In der klass. EDynamik kann man die
 Kontinuitätsgl. schreiben als: $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$

Das entspricht der Kontinuitätsgleichung (in
 Viererschreibweise) falls

$$j^\mu \sim \psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*$$

bis auf Vorzeichen

mit $\partial^\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$, wobei Vorzeichen nach
 Konvention

Raumkomponenten:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im_0} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Zeit-Komponente:

$$j^0 - \rho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right)$$

Ergebnis:

\vec{j} sieht aus wie in der nicht-relativist. QM,
aber ρ ist anders ($SG = \rho = \psi^* \psi > 0$)
 ρ enthält sowohl ψ als auch $\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$

Da die KG-Gl. 2. Ordnung in der Zeit ist
können die Anfangswerte von ψ und $\dot{\psi}$
unabhängig gewählt werden

$\Rightarrow \rho$ ist nicht automatisch positiv

Ausweg: Interpretiere ρ als Ladungsdichte wie in der ψ -Dyne...
(... gleich.)

e) Lösungen der KG-Gleichung für ein freies Teilchen

Ansatz: $\psi(\underline{r}, t) = \psi_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$ Ebene Welle
 (allgemein: $\psi(\underline{r}, t) \sim \int d\underline{k} \phi(\underline{k}) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$) Wellenpaket

Einsetzen in die KG-Gleichung

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi$$

$$= \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \underline{k}^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = c^2 \left(\underline{k}^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right)$$

$$\Rightarrow \omega = \pm c \sqrt{\underline{k}^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}}$$

oder

$$E = \hbar \omega = \pm c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

formal 2 Lösungen

Es gibt formal also zwei Lösungen, insbesondere auch eine Lösung mit negativer "Energie".

Das ist anders in der nicht-relativist. QM:
 Dort gibt immer eine niedrigste Energie (und damit eine Grundzustand)

Anmerkung

Ladung interpretativ der KG-Gleichung

wir haben gesehen: $\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$

Kann negativ werden, also nicht als
Aufhaltungswahrscheinlichkeit interpretiert werden

- Die KG-Gl. besitzt Lösungen mit $E = \pm \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$

„Ausweg“

Definiere durch Multiplikation mit Elementarladung e_0

„Ladungsdichte“

Ladungs-
stromdichte $\rho'(\underline{r}, t) = \frac{i\hbar e_0}{2m_0c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$
 $\mathbf{j}'(\underline{r}, t) = \frac{-\hbar e_0}{2m_0} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$

ρ' als Ladungsdichte darf beide Vorzeichen haben!

Wellenfunktion des freien Teilchens

$$\psi_{\pm}(\underline{r}, t) = A_{\pm} e^{i\hbar^{-1}(p \cdot \underline{r} \mp |E|t)}$$

setze das in Def. von ρ' ein mit $|E| = \pm \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$

man erhält:

$$\rho'_{\pm}(\underline{r}, t) = \pm \frac{e_0 |E|}{m_0c^2} \psi_{\pm}^*(\underline{r}, t) \psi_{\pm}(\underline{r}, t)$$

ψ_+ : Teilchen mit Ladung $+e_0$
 ψ_- : Teilchen mit Ladung $-e_0$

f) Nicht-relativist. Grenzfall
der KG-Gl. für freies Teilchen

wir hatten:

$$\psi(\underline{r}, t) = \psi_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

setze $\omega = \frac{E}{\hbar}$

positive Lösung aus der Wurzel

→ Ruheenergie

$$-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \psi$$

umschreiben:

$$\psi(\underline{r}, t) = \varphi(\underline{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$$

mit $\varphi(\underline{r}, t) = \varphi_0 e^{i \underline{k} \cdot \underline{r} - \frac{i}{\hbar} E' t}$
mit $E' = E - m_0 c^2$

(die dahinter:

Spalte Ruheenergie $m_0 c^2$ im Zähler ab, dann.

Im nichtrelativist. Grenzfall ist die Ruheenergie die dominierende Energie im System!

$$\rightarrow E' = E - m_0 c^2 \ll m_0 c^2$$

→ $\varphi(\underline{r}, t)$ ist dann nur langsam veränderlich
in der Zeit (in Vergleich zu $e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar} t}$)

Betrachte nun die
Zweite Zeitableitung von $\psi = \varphi(\underline{r}, t) e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar} t}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left((\dot{\varphi} - i\frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi) e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar} t} \right) \\ &= \ddot{\varphi} e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar} t} - i\frac{m_0 c^2}{\hbar} \dot{\varphi} e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar} t} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar} t} \end{aligned}$$

Setze $\dot{\varphi}$ gleich Null, da φ nur langsam
mit t variiert !!

(beachte:
Es gilt bereits für 1. Zeitableitung von $\psi = \varphi_0 e^{i(\frac{m_0 c^2}{\hbar} t - \frac{1}{\hbar} \underline{p} \cdot \underline{r})}$
 $|i\hbar \dot{\varphi}| = E \varphi \leq m_0 c^2 \varphi$ bereits die erste
Ableitung ist klein!

Kombiniere mit voller KG-Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= \left(\Delta - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi \\ \text{setze } \psi &= \varphi e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar} t} \text{ und benutze die vorherige} \\ &\quad \text{Näherung} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta}{c^2} \left(-\frac{i}{\hbar} 2m_0 c^2 \dot{\varphi} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$$

$$= \left(\Delta \varphi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$$

dividiere durch Exponentialfaktoren und beachte
 Aufhebung der Terme $\sim \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}$

$$\rightarrow -\frac{i}{\hbar} 2m_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \varphi}$$

(Vollständiggl. für ein freies Teilchen (in Ortsdarstellung))

g) Ankopplung an das elektromagnet. Feld