Wh: Quantisierte kleine Schwingungen (entkoppelt)
$\rightarrow$ Phononen

$$\hat{H}_{Phonon} = \sum_{\underline{k},s} \underbrace{\hbar \omega_s(\underline{k}) \Big(\overbrace{\hat{a}^+_{\underline{k},s} \hat{a}_{\underline{k},s}}^{\hat{N}_{\underline{k},s}} + \frac{1}{2} \Big)}_{\text{beschreibt harmonische Oszillator}}$$

Die Eigenzustände jedes Oszillators (zu geg. $\underline{k}$, s) beschreiben n-Phononenzustand

beachte: Phononen sind Bosonen! $\underbrace{\left[\hat{a}_{\underline{k},s}, \hat{a}^+_{\underline{k}',s'}\right]}_{\text{Kommutator}} = \delta_{\underline{k}\underline{k}'}\delta_{ss'}$

Elektromagnetische Felder, zunächst spezialisiert auf den Fall $\rho(\underline{r},t) = 0$, $\underline{j}(\underline{r},t) = 0$

Wir arbeiten in der Coulombeichung $\nabla \cdot \underline{A} = 0$

(im Prinzip zwei Potentialgl.:

$$\Delta \phi = 0 \quad , \quad -\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}} + \frac{1}{c^2}\nabla\dot{\phi} = 0$$

keine Retardierungseffekte in ϕ $\Rightarrow$ ϕ ist immer null

$\Longrightarrow$ relevante Gl.: $\boxed{-\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}} = 0}$ und $\boxed{\nabla \cdot \underline{A} = 0}$

Lösung: Entwicklung nach Eigenmoden:

$$(*) \quad \boxed{\underline{A}(\underline{r},t) = \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) e^{-i\omega_k t} + a^*_{\underline{k}} \underline{u}^*_{\underline{k}}(\underline{r}) e^{i\omega_k t}\right)}$$

Bemerkungen

- (*) sollte Entwicklung in ein vollständiges Orthonormalsystem darstellen

$$\Rightarrow \text{fordere} \quad \int d\underline{r}\; \underline{u}_{\underline{k}}^{*}(\underline{r}) \cdot \underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r}) = \delta_{\underline{k},\underline{k}'}$$

häufig wählt man: $\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \sim \underbrace{e^{+i\underline{k}\cdot\underline{r}}}_{\text{Ortsabhängigkeit}}$

- (*) sollte die Coulombeichung erfüllen

$$\nabla \cdot \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \underline{u}_{\underline{k}}^{*}(\underline{r}) = 0$$

(mit $\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \sim e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$

$$\rightarrow \nabla \cdot \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \sim \underline{k} \cdot \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \stackrel{!}{=} 0$$

$\underline{k}$ und $\underline{u}_{\underline{k}}$ müssen also senkrecht stehen!

$\Rightarrow$ man spricht von "transversalen Moden"

- Bestimmung der Eigenfrequenzen $\omega_{\underline{k}}$:
Setze (*) ein in $-\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0$

$$\Rightarrow -\sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a_{\underline{k}} \, \Delta \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) e^{-i\omega_k t} + a_{\underline{k}}^* \, \Delta \underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r}) e^{i\omega_k t} \right)$$

$$+ \frac{1}{c^2} \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) (-i\omega_k)^2 e^{-i\omega_k t} + a_{\underline{k}}^* \underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r}) (i\omega_k)^2 e^{i\omega_k t} \right) \overset{!}{=} 0$$

Das muss ~~unab~~ für jedes $\underline{k}$ und unabhängig für Real- und Imaginärteil gelten:

$$\underbrace{\Delta \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})}_{-k^2 \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}),\ \text{falls}\ \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \sim e^{i\underline{k}\underline{r}}} + \frac{\omega_k^2}{c^2} \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0$$

Frage nun:

Wie lautet der Hamiltonoperator des freien Strahlungsfeldes (also des elektromagnetischen Feldes mit $\rho = \underline{j} = 0$)

„Fundierte" Herleitung von diesem $\hat{H}$ (sowie von $\hat{H}$ mit Kopplung) über Formalismus der Lagrangedichte

→ später

Hier: Konstruiere $\hat{H}$ „ad hoc" auf Basis von Wissen aus der E-Dynamik

Ausgangspunkt:

Energie, Energiedichte des klassischen Elektromagnet. Feldes

$$\underset{\text{Gesamtenergie}}{U} = \int d\underline{r}\, \underset{\text{Energiedichte}}{\varepsilon(\underline{r},t)}$$

$$(**)\quad \boxed{U = \int d\underline{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{B}(\underline{r},t)\right)^2 \right)}$$

"ad hoc" – Annahme: $\hat{H}$ sieht aus wie U !

$\Rightarrow$ Wir benötigen also $\underline{E}$ und $\underline{B}$ auf Basis unseres Ansatzes für $\underline{A}$!

Elektr. Feld (Erinnerung: $\phi = 0$!)

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\dot{\underline{A}}(\underline{r},t)$$

$$= \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(i\omega_k a_k \underline{u}_k e^{-i\omega_k t} - i\omega_k a_k^* \underline{u}_k^* e^{i\omega_k t} \right)$$

$$= i \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a_k \underline{u}_k e^{-i\omega_k t} - a_k^* \underline{u}_k^* e^{i\omega_k t} \right)$$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r},t)$$

$$= \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a_k \left(\nabla \times \underline{u}_k\right) e^{-i\omega_k t} + a_k^* \left(\nabla \times \underline{u}_k^*\right) e^{i\omega_k t} \right)$$

Berechne nun Quadrate im Raumintegral

$$\int d\underline{r}\,(\underline{E})^2 = i^2 \sum_{\underline{k},\underline{k}'} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar\omega_{k'}}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'} e^{-i\omega_k t - i\omega_{k'} t} \int d\underline{r}\, \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \cdot \underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})$$

$$+ i^2 \sum_{\underline{k},\underline{k}'} \;\;"\;\;\;" \;\; a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}'}^* e^{i\omega_k t + i\omega_{k'} t} \int d\underline{r}\, \underline{u}_{\underline{k}}^* \cdot \underline{u}_{\underline{k}'}^*$$

$$- i^2 \sum_{\underline{k},\underline{k}'} \;\;"\;\;\;" \;\; a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'}^* e^{-i\omega_k t + i\omega_{k'} t} \int d\underline{r}\, \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\, \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$$

$$- i^2 \;\;"\;\;\;"\;\;\;" \;\; a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}'} e^{i\omega_k t - i\omega_{k'} t} \int d\underline{r}\, \underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r})\, \underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})$$

Verwende in den letzten beiden Termen die Orthogonalitätsrelation für die $\underline{u}_k$'s

$$\Rightarrow \int d\underline{r}\,(\underline{E})^2 = -\sum_{\underline{k},\underline{k}'} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar\omega_{k'}}{2\varepsilon_0}\right) a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} \int d\underline{r}\, \underline{u}_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}'}$$

$$- \;\;"\;\;\;"\;\;\;" \quad \text{komplex konjugiert}$$

$$+ \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right) a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right) a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}$$

Magnetischer Anteil: $\left(\int d\underline{r}\, (\underline{B})^2 \right)$

Zu betrachten sind Terme der folgenden Art:

$$ⓐ = \int d\underline{r}\, \left(\nabla \times \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\right)\left(\nabla \times \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})\right)$$

~~best~~ benutze Identität

$$\nabla\cdot(\underline{u}_1\times\underline{u}_2) = \underline{u}_2\cdot(\nabla\times\underline{u}_1) - \underline{u}_1\cdot(\nabla\times\underline{u}_2)$$

setze hier: $\underline{u}_2 = \nabla\times\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})$

$\underline{u}_1 = u^*_{\underline{k}'}(\underline{r})$

$$(a) = \int d\underline{r}\ \underline{u}_2(\nabla\times\underline{u}_1) = \underbrace{\int d\underline{r}\ \nabla\cdot(\underline{u}_1\times\underline{u}_2)} + \int d\underline{r}\ \underbrace{\left(\nabla\times(\nabla\times\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}))\right)}\underline{u}^*_{\underline{k}'}(\underline{r})$$

$\oint_{O_V} d\underline{F}(\underline{u}_1\times\underline{u}_2)$

ergibt Null, da $\underline{A}$ auf dem Rand verschwinden soll!

benutze

rot(rot $\underline{F}$)

$= \nabla(\nabla\cdot\underline{F}) - \Delta\underline{F}$

grad div

hier $\underline{F} = \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})$

beachte:

$\nabla\cdot\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0$ wg. Coulombeichung!

$$\Rightarrow (a) = -\int d\underline{r}\ \Delta\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\,\underline{u}^*_{\underline{k}'}(\underline{r})$$

benutze $\left(\Delta + \frac{\omega_k^2}{c^2}\right)\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0$

$$= \frac{\omega_k^2}{c^2}\int d\underline{r}\ \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\,\underline{u}^*_{\underline{k}'}(\underline{r}) = \omega_k^2\,\varepsilon_0\mu_0\,\delta_{\underline{k},\underline{k}'}$$

Weitere Terme, die auftreten:

$$(b) = \int d\underline{r}\left(\nabla\times\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\right)\left(\nabla\times\underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})\right)$$

$$= \ldots = \frac{\omega_k^2}{c^2}\int d\underline{r}\ \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\,\underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})$$

und das Ganze komplex konjugiert

Kombiniere alles ((Skript (**))

$$U = \int d\underline{r} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{B}(\underline{r},t)\right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\cancel{\varepsilon_0}}\right)\left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}\right)$$

$- 2$ Terme mit Integralen $\int d\underline{r}\, u_{\underline{k}}(\underline{r}) u_{\underline{k}'}(\underline{r})$ bzw. Komplex-Konjugiert

Beträge aus $\underline{E}^2$

$$+ \frac{1}{2\mu_0} \sum_{k} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0}\right)\left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* \frac{\omega_k^2}{c^2} + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}} \frac{\omega_k^2}{c^2}\right)$$

$\left(\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0\right.$!

$+ 2$ Terme mit Integralen $\int d\underline{r}\, u_{\underline{k}}(\underline{r}) u_{\underline{k}'}(\underline{r})$ bzw Komplex Konjugiert

Die "unbequemen" Terme mit Produkten der Form $a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'}$ bzw $a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}'}^*$ heben sich heraus!

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \frac{\hbar\omega_k}{2} \left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}\right) \quad \text{aus } \underline{E}^2$$

$$+ \frac{1}{2} \quad " \quad " \quad " \quad \text{aus } \underline{B}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \hbar\omega_k \left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}\right)}$$

Gesamtenergie

immer noch klassisch!

Quantisierung (wieder "ad hoc")

$U \rightarrow \hat{H}$

$a_{\underline{k}} \rightarrow \hat{a}_{\underline{k}}$, $a_{\underline{k}}^* \rightarrow \hat{a}_{\underline{k}}^+$ mit $[\hat{a}_{\underline{k}}, \hat{a}_{\underline{k}'}^+] = \delta_{\underline{k},\underline{k}'}$

(bosonische) Vertauschungsrelation!

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \hat{H}_{\text{freie Strahlung}} &= \sum_{\underline{k}} \hbar\omega_{\underline{k}} \left(\hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{\underline{k}} \hbar\omega_{\underline{k}} \left(\hat{N}_{\underline{k}} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}}$$

formal analog zu Phononen

Hamilton-Operator des freien elektromagnetischen Feldes (ohne Ladungen und Ströme)

Bemerkungen:

- Die zu $\hat{H}$ gehörenden (Quasi-)Teilchen heißen Photonen
- Photonen sind Bosonen, wie durch die Kommutatorrelationen ausgedrückt

Alternativbegründung:

- man weiß (irgendwoher...), dass Photonen den Spin $S=1$ haben, also S ganzzahlig
  $\Rightarrow$ es müssen Bosonen sein!
- Experimente zeigen, dass die statistischen Eigenschaften der Photonen bosonischen Charakter haben (z.B. Planck'sche Strahlungsformel)

Analog zur Energie werden auch die Felder
$\underline{A}$, $\underline{E}, \underline{B}$ quantisiert

z.B. für das Vektorpotential:

$$\boxed{\hat{\underline{A}}(\underline{r}) = \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{a}_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) + \hat{a}^{+}_{\underline{k}} \underline{u}^{*}_{\underline{k}}(\underline{r})\right)}$$

Zeitunabhängig, wenn wir (wie hier) den Operator $\hat{A}$ im Schrödingerbild betrachten!

Die Zeitabhängigkeit folgt automatisch im Heisenbergbild:

$$\hat{a}_{\underline{k},H}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\, \hat{a}_{\underline{k}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$$

Heisenberg

BWGL (Heisenberg):

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_{\underline{k},H}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, a_{\underline{k}}(t)]$$

$$= i\omega_k [\hat{N}_{\underline{k}}, a_{\underline{k}}(t)] = -i\omega_k \hat{a}_{\underline{k}}(t)$$

$\hat{H} = \hat{H}_{\text{freie Strahlung}}$

$$\Rightarrow \hat{a}_{\underline{k},H}(t) = e^{-i\omega_k t}\, \hat{a}_{\underline{k}}$$

IV.3. Herleitung von Kopplungen über Lagrangedichte (Eichsubst./Wechselwirkung)

IV.3.1. Formalismus:

Klassische Feldtheorie

analog: klass. Mechanik für Teilchen $L = L(q, \dot{q}, t)$

$$L = \int d\underline{r}\, \mathcal{L} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \varphi_{i,\mu})$$

Lagrangefunktion

Lagrangedichte

$\varphi_i = \varphi_i(\underline{r}, t)$ Felder, z.B. Komponente des Feldes $A^\mu(x)$

$\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\varphi_{i,\mu}(\underline{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_i(\underline{r}, t)$$

mit $x^\mu = (t, x, y, z)$

z.B. $\varphi_{i,0}(\underline{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i = \dot{\varphi}_i$

Es gilt (analog zur Mechanik) ein Wirkungsprinzip:

$$\text{Wirkung:} \quad S = \int d\underbrace{x^0}_{t}\, L = \int dx^\mu\, \mathcal{L}$$

Integral über alle vier Komponenten

$\delta S = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}} = 0}$$

Einsteinsche Summenkonvention

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung (oder allg. Euler-Lagrange-Gl.) für die Felder, analog zu $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$