

II.7. (Wechselwirkungsfreie) Bosonen bei tiefen Temperaturen

Was erwarten wir?

tiefe Temperaturen \rightarrow System will die Energie minimieren

\rightarrow Bosonen besetzen möglichst niedrige Energiezustände

Beachten Für Bosonen gibt es kein Pauli Prinzip

\rightarrow Im Prinzip können alle Teilchen den Ein teilchen Grundzustand besetzen

Wir erwarten:

$$\langle \hat{n}_{\alpha_0} \rangle \sim N \quad \text{für } T \rightarrow 0$$

\nwarrow Teilchenzahl
 \uparrow Quantenzahl des tiefsten Niveaus

\rightarrow "makroskopische Besetzung des Grundzustandes"

Im Folgenden

Besetzung des Grundzustandes ist nicht trivial!

Zwischen der Hochtemperaturphase (Teilchen gemäß der Bose-Statistik verteilt und der makroskop. Besetzung des Grundzustandes findet ein Phasenübergang statt

\rightarrow Bose-Einstein-Kondensation

Modellsystem

Teilchen im Kasten mit Volumen $V=L^3$, keine Wechselwirkungen und Spin $S=0$

Einteilchenenergie

$$\epsilon_{\underline{k}} \rightarrow \epsilon_{\underline{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{mit} \quad \underline{k} = \frac{2\pi}{L} (m_x, m_y, m_z)$$

Bose-Einstein Statistik

$$\langle n_{\underline{k}} \rangle = \langle n_{\underline{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\underline{k}} - \mu)} - 1}$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

μ - chem. Potential

$$p = \hbar k$$

Damit $\langle n_{\underline{k}} \rangle$ positiv und endlich ist

muss gelten

$$e^{\beta \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)} > 1 \quad \forall p, \text{ also insbesondere für } p=0$$

$$\Rightarrow \mu < 0$$

$$\text{bzw. } z = e^{\beta\mu} < 1 \quad (z > 0)$$

z Fugazität

Betrachten nun die mittlere Teilchendichte

$$\rho = \frac{\langle \hat{N} \rangle}{V} = \frac{1}{V} \sum_{\underline{k}} \langle \hat{n}_{\underline{k}} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\underline{k}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\underline{k}} - \mu)} - 1}$$

Idee

Für sehr große Systeme (also im thermodynam.)

Limes $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ bzw. $L \rightarrow \infty$ mit $N/V = \text{const.}$

Wird der Abstand der Energie nennenswert sehr klein

$$\Delta k_x = \Delta k_y = \Delta k_z = \frac{2\pi}{L} \quad \text{klein}$$

→ Näheren Summe durch ein Integral

$$\sum_{\underline{k}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\underline{k}} - \mu)} - 1} = \sum_{k_x} \sum_{k_y} \sum_{k_z} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\underline{k}} - \mu)} - 1}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{V}{(2\pi)^3}\right) \int d\underline{k} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\underline{k}} - \mu)} - 1}$$

$$S = \frac{\langle \hat{N} \rangle}{V} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\underline{k} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\underline{k}} - \mu)} - 1} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk k^2 \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\underline{k}} - \mu)} - 1}$$

Wählen nun als neue Integrationsvariable $\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$d\epsilon = \frac{\hbar^2 k}{m} dk \quad \Rightarrow \quad dk = \frac{m}{\hbar^2 k} d\epsilon$$

$$\Rightarrow S = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sqrt{2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \quad (*)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \beta^{-3/2} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{1/2}}{e^x - e^{-\beta\mu} - 1} \quad \text{mit } x = \beta\epsilon$$

definieren

$$g_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} - 1} dx \quad z = e^{\beta\mu}$$

↑ Gammafkt

speziell

$$g_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{1/2}}{e^x z^{-1} - 1}$$

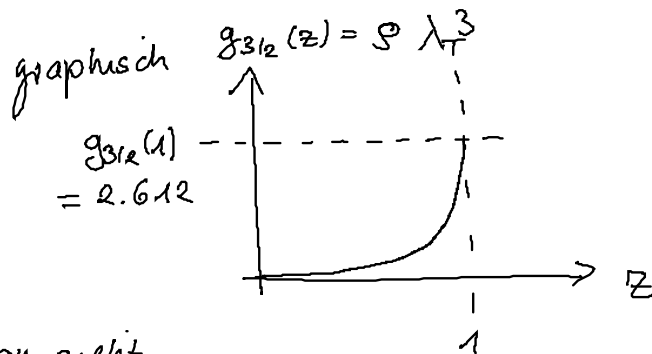
mit $\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$S = \frac{\langle \hat{N} \rangle}{V} = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z) \quad (*)$$

$$\lambda_T = \left(\frac{\hbar^2 2\pi}{m k_B T} \right)^{1/2}$$

therm. Wellenlänge

Dichte als Fkt von μ und T
 (beachte T steckt in λ_T und in z !)



Man sieht

- Für $\sum \lambda_T^3 < 2.612$ ist $z < 1$: "Normales" Verhalten
 z wächst mit dem Druck
 - Für $\sum \lambda_T^3 > 2.612$ kann man gl. \otimes nicht
 nach mehr nach z auflösen
- Definiert krit. Temperatur T_c unterhalb der gl.
 \otimes nicht mehr lösbar ist

$$\sum \lambda_T^3 \Big|_{T_c} = g_{3/2}(1) = 2.612$$

$$\sum \left(\frac{\hbar^2 2\pi}{m k_B T_c} \right)^{3/2} = 2.612$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{2\pi \hbar^2}{k_B m} \left(\frac{\rho}{2.612} \right)^{2/3} \sim \rho^{2/3}$$

$$T > T_c \quad \sum \lambda_T^3 < 2.612 \quad z \text{ im erlaubten Bereich}$$

$$T < T_c \quad \sum \lambda_T^3 > 2.612$$

$$T = T_c \quad z = 1$$

Wenn $z = 1$

$$\langle n_{\underline{k}=0} \rangle = \frac{1}{e^{\epsilon_0} z^{-1} - 1} = \frac{1}{z^{-1} - 1} \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} \infty$$

\Rightarrow Unser Ergebnis $\rho \lambda_T^{-3} = g_{3/2}(z)$ kann für $T \leq T_c$ nicht mehr richtig sein

Fehler entsteht beim Übergang von der Summe zum Integral

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{V} \sum_{\underline{k}} \langle n_{\underline{k}} \rangle \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{k} n(\underline{k}) \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^2 n(k) \end{aligned}$$

\uparrow Term $k=0$
 trägt nicht bei, obwohl
 wir hier eine makroskop.
 Besetzung erwarten

Neuer Ansatz bei tiefen Temperaturen
 (ziehen $k=0$ Term aus dem Integral bzw. der Summe
 heraus):

$$\rho = \frac{1}{V} \langle n_{\underline{k}=0} \rangle + \frac{1}{V} \sum_{\underline{k} \neq 0} \langle n_{\underline{k}} \rangle$$

Der zweite Term bleibt auch für $\mu \rightarrow 0$ endlich
 und kann daher wie vorher behandelt werden

$$\rho = \frac{1}{V} \frac{1}{z^{-1} - 1} + \lambda_T^{-3} g_{3/2}(z)$$

$$= \mathcal{S}_0(T, \mu) + \mathcal{S}_n(T, \mu)$$

\uparrow Anteil der Bosonen im Grundzustand \uparrow Anteil der Bosonen im angeregten Zustand

Schreiben \mathcal{S}_n mit Defn $T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m} \left(\frac{\rho}{2.612} \right)^{2/3}$

um

$$\mathcal{S}_n(T, \mu) = \mathcal{S} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{2.612}$$

$$\lambda_T = \left(\frac{\hbar^2 2\pi}{m k_B T} \right)^{1/2} = \left(\frac{2.612}{\rho} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{T_c}{T}}$$

Discussion

$T > T_c$ $z < 1$ ($\mu < 0$)
im thermodynam. Limes

$$\mathcal{S}_0(T, \mu) = \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{V} \frac{1}{z^{-1} - 1} = 0$$

→ Ein Teilchen Grundzustand ist "leer"
und $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n(T, \mu)$ wie vorher

$T < T_c$ Lösen $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_n$ nach z ergibt sich (Beweis/ klein, positiv)

$$z = 1 - \frac{\tilde{a}(T)}{V} \rightarrow 1$$

\uparrow im thermodynam. Limes

$$\Rightarrow g_{3/2}(z) \approx g_{3/2}(1) = 2.612$$

$$\rho = \rho_0(T) + \rho \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

$$\frac{\rho_0(T)}{\rho} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

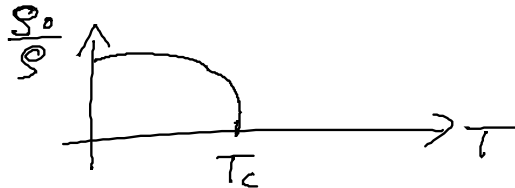
Anteil des "Kondensats", d.h. der Teilchen im Grundzustand

Zusammenfassend

$$\rho(T, \mu) = \begin{cases} \rho_n(T, \mu) = \lambda_T^{-3} g_{3/2}(\alpha) & T > T_c \\ \rho_0(T) + \rho_n(T, \mu=0) & T < T_c \end{cases}$$

$$\frac{\rho_0(T)}{\rho} = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} & T < T_c \end{cases} \quad \text{Phasenübergang}$$

\Rightarrow wir können $\rho_0(T)/\rho$ als Ordnungsparameter der Bose-Einstein-Kondensation auffassen



Bemerkungen

- BE-Kondensation findet im Impulsraum statt
keine räumliche Phasentrennung (wie bei einem klassischen System)

also Kondensation \Leftrightarrow Übergang der Bosonen in den niedrigsten Energiezustand

- BE-Kondensation setzt ein wenn $\rho \lambda_T^3 = 2.612$

also $\lambda \sim n^{-1/3} = O(\lambda_T)$
 mittlere Teilchenabstand Maß für Ausdehnung des quantenmechan. Wellenpakets

• Die BE-Kondensation ist ein rein quantenmechan. Phänomen, folgt nur aus der Symmetrie der Vielteilchenwellenfunktion

⇒ Sie hat nichts mit echten Wechselwirkungen zu tun

• Erste theoret. Arbeiten zu BE-Kondensation

Bose 1924 (Photonen)

Einstein 1925

Erste experimentelle Realisierung 1995 mit stark verdünnten Gasen aus Alkali-Atomen (Na, Rb)

→ Nobel-Preis Ketterle 2001