Lösungen freie Dirac-Gleichung

$$\underline{\Psi} = \Psi_{p,\lambda,m_s} \qquad E_\lambda(p) = \lambda c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}$$

4-komponentig

$\lambda = \pm 1$ jeder ist zweifach entartet ($m_s = \pm\frac{1}{2}$)

$$[\hat{H}_D, \hat{p}] = 0 \quad , [\hat{H}_D, \hat{\lambda}] = 0$$

$$\boxed{\hat{\underline{S}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_i & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_i\end{pmatrix}} \quad \hat{\lambda} = \hat{\underline{S}}\cdot\frac{p}{p} \qquad \text{Eigenwerte } \pm\hbar/2$$

$= m_s\hbar$ mit $m_s = \pm 1/2$

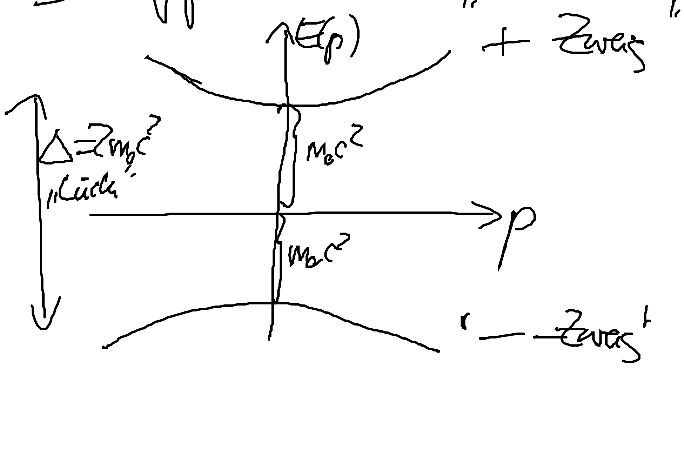
$$\underline{\Psi} = \begin{pmatrix}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{pmatrix} e^{-i/\hbar[E_\lambda(p)t - p\cdot r]}$$

e) Energiespektrum der Dirac-Teilchen

Wir haben gesehen:
Wie auch bei der Klein-Gordon-Gl. gibt es im Rahmen der Dirac-Theorie Lösungen mit positiver und negativer (!) Energie

$$E_\pm = \pm c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}$$

Illustration:



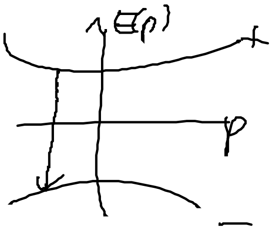
Jeder Zweig ist mit 2 Spinzuständen besetzt

Können wir die Lösungen mit E_- komplett ignorieren?
Nein!

Denn: Ein beliebiger Spinor ist Überlagerung aller vier "Basisvektoren" und enthält damit i.A. auch Anteile mit E_-

und:
Selbst wenn das System anfangs positive Energie hat, könnte es (durch Wechselwirkung mit Strahlung) evtl. Übergänge in Zustände mit negativer Energie geben

Im Prinzip vorstellbar:
Ein Elektron auf dem "+-Zweig" zerfällt durch Aussenden eines γ-Quants (Photon)



Das wird experimentell aber nicht beobachtet!

Dirac's Idee (1930)

Alle Zustände mit negativer Energie sind vollständig besetzt. ("Dirac-See"). Das ist der Grundzustand (Vakuumzustand)

Wegen des Pauli-Verbots (für Fermionen $(s=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$ kann jeder Zustand höchstens einmal besetzt werden)

Können Teilchen mit positiver Energie dann nicht in Zustände negativer Energie übergehen!

Problem am „Dirac-See"

Man hat implizit angenommen, dass es unendlich viele Teilchen (und damit Zustände) gibt

während die Dirac-Gl. erst einmal als Einteilchengl. konstruiert wurde ......

Frage: Was ist im Rahmen dieses Bildes (Dirac-See) ein angeregter Zustand?

Man beobachtet experimentell

Durch Einstrahlen eines γ-Quants (Energie $\hbar\omega$, Impuls $\hbar \underline{k}$) kann ein Teilchen aus dem "E_--See"
$\underline{p}$

in den Zustand mit positiver Energie gehoben werden!

Im Vergleich zum Vakuumzustand hat der neue Zustand positive Ladung und positive Energie

$\Rightarrow$ Erzeugung eines neuen Elektrons und eines "Positrons" (Antiteilchen des Elektrons)

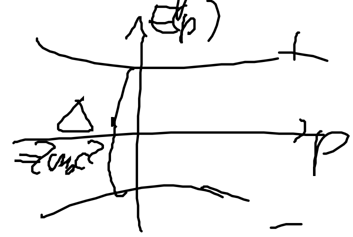
(Loch im Dirac-See) selbe Ruhemasse m_0 wie ein Elektron, aber entgegengesetzte Ladung

Energiebilanz des „Paarerzeugungsprozesses“

$$\gamma \longrightarrow \underset{\text{Positron}}{e^+} + \underset{\text{Elektron}}{e^-}$$

$$\hbar\omega = \underset{\text{positiv}}{E_+} - \underset{\text{negativ}}{E_-} = E_+ + \overbrace{|E_-|}^{E_+}$$

$\Rightarrow$ Energie des eingestrahlten Photons muß mindestens <u>Zweimal</u> der Ruheenergie m_0c^2 entsprechen



<u>Abschließende Bemerkung:</u>

- Dirac-Theorie ist eigentlich Vielteilchentheorie. Adäquate Beschreibung erst durch Quantisierung des Dirac-Feldes (Quantenfeldtheorie)

- Will man an der Einteilcheninterpretation der Dirac-Gl. festhalten, so muß man sich auf den E_+-Zweig beschränken (und den E_--Zweig ignorieren)

<u>I.3. Nicht-relativistischer Grenzfall</u>

Motivation

Genaueres Verständnis der Kopplung von Atomen an elektromagnetischen Feldern

(Spektroskopie, Spin-Bahn-Wechselwirkung)

Es stellt sich heraus:
Wesentl. Phänomene können bereits im Rahmen einer Störungstheorie für relativist. Effekte verstanden werden!

Ausgangspunkt:
Dirac-Gl. im elektromagnet. Feld
$\hat{=}$ in Anwesenheit der Potential
$\phi(\underline{r},t)$, $\underline{A}(\underline{r},t)$

Ersetze dazu wie bei der KG-Gleichung (und analog zur SG, klass. Mech.)

$$\hat{\underline{p}} \longrightarrow \hat{\underline{p}} - q/c\,\underline{A}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi$$

oder $\hat{H}_D \rightarrow \hat{H}_D + q\phi$

q Ladung
$q = -e_0$ für Elektron

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = \left[c\,\hat{\underline{\alpha}} \cdot (\hat{\underline{p}} - q/c\,\underline{A}) + \hat{\beta} m_0 c^2 + q\phi \right] \underline{\psi}} \quad (*)$$

Dirac-Gl. im elektromagnet. Feld

Im Folgende:

$$\hat{\underline{\Pi}} = \hat{\underline{p}} - q/c\,\underline{A}$$

nehme für $\hat{\underline{\alpha}}, \hat{\beta}$ wieder die Standarddarstellung,

also
$$\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}$$

schreibe für $\underline{\psi}$:
$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$
mit $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2$ zweikomponentige Spaltenvektoren

Einsetzen in $(*)$:

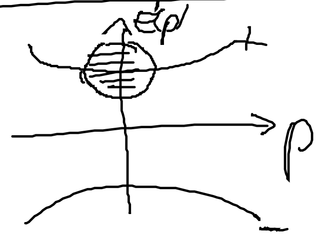
$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \hat{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{\Pi}}\, \underline{\varphi}_2 \\ \hat{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{\Pi}}\, \underline{\varphi}_1 \end{pmatrix} + q\phi \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ -\underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Dabei ist
$$\underbrace{\hat{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{\Pi}}}_{2\times 2 \text{ Matrix!}} = \hat{\sigma}^1 \hat{\Pi}_1 + \hat{\sigma}^2 \hat{\Pi}_2 + \hat{\sigma}^3 \hat{\Pi}_3$$

Ziel: Verständnis des nichtrelativist. Grenzfall

Wir wissen für freie Teilchen:

$\psi \sim e^{-\frac{i}{\hbar}E_+ t}$ ...



Wir separieren von der vollen Funktion den Faktor $e^{-\frac{i}{\hbar}m_0 c^2 t}$ ab

Idee dahinter: Im nichtrelativistischen Grenzfall ist die Größe

$$E' = E_+ - m_0 c^2 = m_0 c^2 \sqrt{\underbrace{\frac{p^2}{m_0^2 c^2}}_{\ll 1} + 1} - m_0 c^2$$

$$\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2 m_0^2 c^2} + \dots\right) - m_0 c^2 \approx \frac{p^2}{2 m_0}$$

(vgl. ähnliche Argumentation bei der Diskussion des nicht-relativist. Grenzfalls ~~der~~ der KG-Gl.)

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$

wobei $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ zeitl. vergleichsweise langsam variieren

(Überlege dazu für freie Teilchen:

$$\tilde{\varphi}_i \sim e^{-\frac{i}{\hbar}E' t} \Longleftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}_i = E' \tilde{\varphi}_i \ll \underbrace{E_+ \varphi_i}_{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\varphi_i}$$

$i = 1, 2$

Setze dies in (**) ein
und benutze Produktregel für zeitl. Ableitung

$$i=1,2 \quad \underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\varphi}_i}_{\text{rechte Seite von (**)}} = e^{\cdots} \, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\hat{\varphi}}_i + m_0 c^2 e^{\cdots} \, \underline{\hat{\varphi}}_i$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \underline{\hat{\varphi}}_1 \\ \underline{\hat{\varphi}}_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \underline{\hat{\sigma}} \cdot \underline{\hat{\Pi}} \; \underline{\hat{\varphi}}_2 \\ \underline{\hat{\sigma}} \cdot \underline{\hat{\Pi}} \; \underline{\hat{\varphi}}_1 \end{pmatrix} + q\phi \begin{pmatrix} \underline{\hat{\varphi}}_1 \\ \underline{\hat{\varphi}}_2 \end{pmatrix} - 2m_0 c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\hat{\varphi}}_2 \end{pmatrix}$$

bisher alles exakt!

Wir nähern nun in der zweiten Gl. (für $\underline{\hat{\varphi}}_2$)

$$q\phi \, \underline{\hat{\varphi}}_2 \ll 2m_0 c^2 \, \underline{\hat{\varphi}}_2$$

$$\text{und} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\hat{\varphi}}_2 \ll 2m_0 c^2 \, \underline{\hat{\varphi}}_2$$

$m_0 c^2$ (Ruheenergie) ist die dominante Energie im Spiel

setze diese Terme gleich Null!!
(einfachste Näherung)

Die zweite Gl. wird dann zu

$$0 = c\,\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{\hat{\Pi}}\,\underline{\tilde{\varphi}}_1 - 2m_0c^2\,\underline{\tilde{\varphi}}_2$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\underline{\tilde{\varphi}}_2 = \frac{\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{\hat{\Pi}}}{2m_0c}\,\underline{\tilde{\varphi}}_1} \quad (*)$$

Erinnern:

$$\underline{\hat{\Pi}} \sim \underline{\hat{p}} \sim \underline{v} \quad \text{Geschwindigkeit}$$

Die Gl. (*) impliziert also, dass $\underline{\tilde{\varphi}}_2$ um einen Faktor (v/c) kleiner ist als $\underline{\tilde{\varphi}}_1$!!

man sagt: $\underline{\tilde{\varphi}}_1$ ($\underline{\tilde{\varphi}}_2$) ist die "große" (kleine) Komponente des Spinors !!

Setze (*) in die Gl. für $\underline{\tilde{\varphi}}_1$ ein

$$\Longrightarrow \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\underline{\tilde{\varphi}}_1 = \frac{(\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{\hat{\Pi}})^2}{2m_0}\,\underline{\tilde{\varphi}}_1 + q\phi\,\mathbb{1}\,\underline{\tilde{\varphi}}_1}$$

Wir haben also effektiv nur noch eine Gleichung für den Zweiervektor $\underline{\tilde{\varphi}}_1$ zu lösen!

Noch zu berechnen:

$$\left(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\hat{\underline{\Pi}}\right)^2 \quad \text{mit} \quad \hat{\underline{\Pi}} = \hat{\underline{p}} - \frac{q}{c}\underline{A}$$

Beachte: $\hat{\underline{\Pi}}$ ist selber Operator, daher ist der Fall komplizierter als beim früher betrachteten Fall $\left(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}\right)^2$

Zunächst gilt:

$$\hat{\underline{\sigma}}\cdot\hat{\underline{\Pi}} = \hat{\sigma}^1\hat{\Pi}_1 + \hat{\sigma}^2\hat{\Pi}_2 + \hat{\sigma}^3\hat{\Pi}_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_3 & \hat{\Pi}_1 - i\hat{\Pi}_2 \\ \hat{\Pi}_1 + i\hat{\Pi}_2 & -\hat{\Pi}_3 \end{pmatrix}}_{2\times 2 \text{ Matrix}}$$

man findet (hier ohne Beweis)

$$\left(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\hat{\underline{\Pi}}\right)^2 = \hat{\underline{\Pi}}^2\,\hat{1} + i\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underbrace{\left(\hat{\underline{\Pi}}\times\hat{\underline{\Pi}}\right)}_{\text{Nicht Null!!}}$$

(anders als beim Vektor)

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\underline{\varphi}}_1 = \frac{1}{2m_0}\hat{\underline{\Pi}}^2\,\hat{1}\,\underline{\varphi}_1 + \frac{1}{2m_0}\hat{\underline{\sigma}}\cdot\left(\hat{\underline{\Pi}}\times\hat{\underline{\Pi}}\right)\hat{\underline{\varphi}}_1 + q\phi\,\hat{1}\,\hat{\underline{\varphi}}_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underbrace{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\underline{\varphi}}_1 = \left(\frac{\hat{\underline{\Pi}}^2}{2m_0} + q\Phi\right)\hat{1}\,\hat{\underline{\varphi}}_1}_{\text{sieht schon aus wie Schrödinger-Gl.!}} + \underbrace{\frac{1}{2m_0}\hat{\underline{\sigma}}\cdot\left(\hat{\underline{\Pi}}\times\hat{\underline{\Pi}}\right)\hat{\underline{\varphi}}_1}_{\text{relativistische Korrektur}}}$$

sieht schon aus wie Schrödinger-Gl.! ($\hat{\underline{\Pi}} = \hat{p} - \frac{q}{c}\underline{A}$), nur dass $\hat{\underline{\varphi}}_1$ zweikomponentiger Vektor!
(Spin $\uparrow$, Spin $\downarrow$)

relativistische Korrektur

Zum relativist. Korrekturterm:

$$(\hat{\underline{\Pi}} \times \hat{\underline{\Pi}})_i \underline{\varphi} = [(\hat{\underline{p}} - \tfrac{q}{c}\underline{A}) \times (\hat{\underline{p}} - \tfrac{q}{c}\underline{A})]_i \underline{\varphi}$$

beachte: Sowohl $\underline{\varphi}$ als auch $\underline{A}$ hängen vom Ort $\underline{r}$ ab $\Rightarrow$ $\hat{\underline{p}}$ wirkt auf beide!

$$= (\hat{\underline{p}} \times \hat{\underline{p}})_i \underline{\varphi} - \tfrac{q}{c}(\hat{\underline{p}} \times \underline{A})_i \underline{\varphi}$$

$$- \tfrac{q}{c}(\underline{A} \times \hat{\underline{p}})_i \underline{\varphi} + \tfrac{q^2}{c^2}\underbrace{(\underline{A} \times \underline{A})_i}_{\text{Null}} \underline{\varphi}$$

erster Term verschwindet, z.B.

$$(\hat{\underline{p}} \times \hat{\underline{p}})_1 = (\hat{p}_2 \hat{p}_3 - \hat{p}_3 \hat{p}_2)\underline{\varphi} \sim (\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2)\underline{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow (\hat{\underline{\Pi}} \times \hat{\underline{\Pi}})_i \underline{\varphi} = -\tfrac{q}{c}(\underline{A} \times \hat{\underline{p}})_i - \tfrac{q}{c}(\hat{\underline{p}} \times \underline{A})_i \underline{\varphi}$$