

Wkt: Schrödingerbild:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Schrödingerbild

Heisenbergbildern:

Operatoren zeitabhängig:

Operatoren im Schrödingerbild

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{A}_S \hat{U}(t, 0)$$

Erwartungswert

$$\hat{U}(t, 0) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

$$\langle \psi(t) | \hat{A}_S | \psi(t) \rangle$$

$$= \langle \psi(t) | e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{A}_S e^{i\hat{H}t/\hbar} | \psi(t) \rangle$$

$$= \langle \psi(0) | \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{A}_S \hat{U}(t, 0) | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \hat{A}_H(t) | \psi(0) \rangle$$

also: Zustände zeitunabhängig

Bewegungsgl. für Heisenbergoperatoren

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{A}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} \right)$$

\hat{A}_S zeitunabhängig

$$= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}_H]$$

Heisenberg'sche Bewegungsgl.

Dirac-Bild (Wechselwirkungsbild)

$$\text{sei } \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

↖ Störung

$$\text{definiere } \hat{A}_D(\epsilon) = \hat{U}_0^+(\epsilon, 0) \hat{A}_S \hat{U}_0(\epsilon, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{A}_D}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{A}_D]$$

↓ $-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 \epsilon$
e

Zustände im Dirac Bild

$$\langle \psi(\epsilon) | \hat{A}_S | \psi(\epsilon) \rangle \stackrel{!}{=} \langle \psi_D(\epsilon) | \hat{A}_D | \psi_D(\epsilon) \rangle$$

$$\Rightarrow |\psi_D(\epsilon)\rangle = \hat{U}_0^+(\epsilon, 0) |\psi(\epsilon)\rangle$$

zugehörige dynamische Gleichung, in $\frac{d}{dt} |\psi_D(\epsilon)\rangle = \hat{H}_1 |\psi_D(\epsilon)\rangle$

I. Relativistische Quantenmechanik

Bisher Kennengeldent:

nichtrelativist. QM, Schrödinger-Gleichung, die
man mit Hilfe von Korrespondenzregeln
aus der klass. Mechanik herleiten kann

Kennwert freies Teilchen:

$$E = E^{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{Klass., nicht-relativistisch}$$

Korrespondenzregeln: $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
 $p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\underline{r}, t)\rangle = \hat{H} |\psi(\underline{r}, t)\rangle$$

$$\text{mit } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

analog Teilchen im Potential $V(\underline{r})$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\underline{r}) \Rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\underline{r})$$

Zusammenhang mit Dispersionsrelation

benutze: $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ (de-Broglie-Relation)

Für freies Teilchen folgt

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Dispersionsrelation:

Zugehörige Wellenfunktion (Wellenpaket)

$$\psi(\underline{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d \underline{k} \tilde{\psi}(\underline{k}) e^{-i(\omega(k)t - \underline{k} \cdot \underline{r})}$$

d Raumdimensionen

$$\text{check: } i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d k \psi(k) \hbar \omega(k) e^{i(kx - \omega t)} \dots$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = \dots \int d^d k \psi(k) \underbrace{\hbar^2 k^2}_{2m} e^{i(kx - \omega t)} \dots$$

I 1. Klein-Gordon-Gleichung

Ausgangspunkt (bester Teilchen)

$$E_{\text{kin}}^{\text{rel}} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (*)$$

Hintergrund zu (*)

Vier-Impuls

$$p^\mu$$

$$p^\mu = m_0 u^\mu$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$

Vierergendimensionalität

zeitl. Komponente

räuml. Komponente

Einstich die Summation

$$\Rightarrow p^\mu p_\mu = m_0^2 u^\mu u_\mu = m_0^2 c^2$$

Komponenten:

zeitl. $p^0 = m_0 \gamma c$

$$= m(v) c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m(v) = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

räumlich

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad i=1,2,3$$

$$= m(v) v^i = m_0 \gamma v^i$$

$$\underline{p}_{\text{rel}} = \gamma m_0 \underline{v}$$

3-Komponentiger Vektor
"relativistische Impuls"

$\frac{v}{c} \rightarrow 0$ (nicht-relativist. Grenzfall)

$$\gamma \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \underline{p} = m_0 \underline{v}$$

Physikalische Bedeutung der Zeitkomponente des Viererimpuls

$$p^0 = \frac{1}{c} E_{\text{kin}}^{\text{rel}}$$

hier ohne Herleitung,
 \rightarrow relativist. Mechanik
Minkowski-Kraf!

$$\Rightarrow p^\mu = \left(\frac{1}{c} E_{\text{kin}}^{\text{rel}}, m_0 \gamma \underline{v} \right)$$

bilde

$$p^\mu p_\mu = \frac{1}{c^2} (E_{\text{kin}}^{\text{rel}})^2 - m_0^2 \gamma^2 v^2$$

$$= \frac{1}{c^2} (E_{\text{kin}}^{\text{rel}})^2 - p_{\text{rel}}^2$$

$$\stackrel{!}{=} m_0^2 c^2$$

$$p_\mu = \left(\frac{1}{c} E_{\text{kin}}^{\text{rel}}, -m_0 \gamma \underline{v} \right)$$

deun

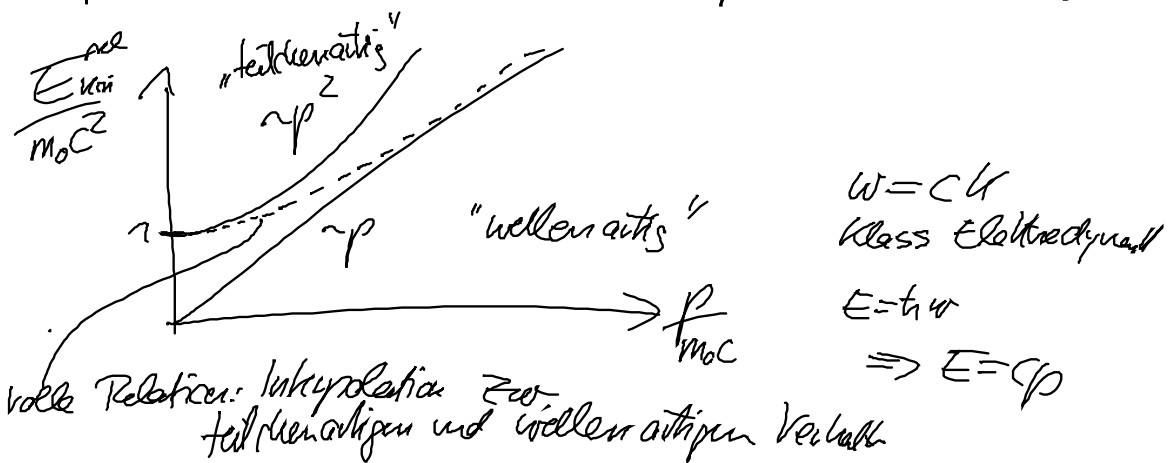
$$p^\mu p_\mu = m_0^2 \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = m_0^2 c^2$$

$$\Rightarrow E_{kin}^{rel} = \sqrt{c^2 p_{rel}^2 + m_0^2 c^4}$$

betrachte Grenzfälle dieser Relation

$$p \ll m_0 c \quad \text{"Ruheimpuls"}, \quad E_{kin}^{rel} \approx \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \frac{p^2}{2m_0}$$

$$p \gg m_0 c \quad E_{kin}^{rel} \approx cp \quad \text{"ultrarelativist."}$$



Ende des Exkurses zur relativist. Energie-Impuls-Relation

Frage: Wie konstruieren wir daraus eine quantenmechanische Bewegungsgleichung für Zustände?

$$\textcircled{\oplus} \quad E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad \text{relativist.}$$

Korrespondenzregeln
ersetze $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta} \psi$$

nicht akzeptabel, da der Differentialoperator Δ
unter der Wurzel steht

Ausweg:

quadriere \otimes zurück

$$\Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

jetzt wieder, $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi = (m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta) \psi$$

$$\Leftrightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta) \psi \quad | : (-\hbar^2 c^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

benutze Definition des d'Alembert-Operators

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\underline{r}, t) = 0$$

Klein-Gordon-Gleichung

Bemerkung

Die Größe $\frac{\hbar}{m_0 c} = \lambda_C$ heißt Compton-Wellenlänge

(spielt eine Rolle bei der relativist. Streuung von
quantenmechan. Teilchen)

Weitere Diskussion der ^{Klein-Gordon} KG-Gleichung

a) Die KG-Gleichung ist partielle Diff. gl.
zweite Ordnung in der Zeit (und in Raum)

⇒ Zur Lösung benötigt man nicht nur $\psi(t=0)$, sondern
auch $\dot{\psi}(t=0)$!!

Die (nicht-relativist.) Schrödinger-Gleichung ist
dagegen erste Ordnung in der Zeit!

b) Die KG-Gleichung ist "Lorentzinvariant"

d.h. sie ändert sich nicht bei einem Wechsel des Inertialsystems

Begründung: $(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}) \psi(\mathbf{r}, t) = 0$

d' Alembert-Operator

$$\square = -\partial^\mu \partial_\mu = -\partial_\mu \partial^\mu \quad \text{mit} \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$
$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

\square ist ~~ist~~ lässt sich schreiben als
(Vier-) Skalarprodukt und ist damit
Lorentzinvariant

Der Faktor $\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}$ ist ebenfalls Skalar

⇒ KG-Gleichung ist Lorentzinvariant, falls auch
 $\psi(\mathbf{r}, t)$ skalar

beachte auch:

Für $m_0 = 0$ reduziert sich die KG-Gl. auf bekannte
Wellengleichung aus der Elektrodynamik

d) Unklar: Berücksichtigung des Spins ??

Erinnerung an nicht-relativist. QM

$$S_{\text{Dirac}} \hat{=} \text{Diracimpuls mit } l=s=\frac{1}{2} \text{ (Elektron)}$$

Diracimpuls wird "eingebaut" über

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{externes magnet. Feld} \\ \text{magnet. Moment zum Diracimpuls} \\ \vec{\mu} \propto \vec{L} \end{array} \right.$$

Problem: Man kann Term der Form $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ nicht als Skalarprodukt von Vektoren sehen
 \Rightarrow Zusatzterm dieser Form würde Lorentz-invariant sein

Folgerung: KG-Gleichung ist gleich für Teilchen mit $S=0$!! (Pi-Mesone)

d) Erfüllung der Kontinuitätsgleichung

Erinnere klass. E-Dynamik.

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

Ladungsdichte (Div) Stromdichte

Dichtet
Erhaltung der
Gesamtladung
aus

nicht-relativist. QM: Auch dort gibt es

Kontinuitätsgleichung:

$$\rho(\vec{r}, t) = \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = |\psi|^2 \quad \text{Aufenthaltswahrscheinlichkeit}$$

entsprechender Strom:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Wahrsch.-Strom

Schrodinger-Gl. $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$