

Beginn 8.30 Quantenmechanik II

Moses-Anmeldung!

Beginn der Übungen: 2. VL-Woche

VL: Di 8³⁰ - 10⁰⁰ EU 205
Do 8³⁰ - 10⁰⁰

Ausgabe Ü-Zettel: Do Beginn VL

Ausgabe Ü-Zettel: 2 Wochen später
Do Beginn VL

Ausgabe in 3 Gruppen

Scheinkriterien:

50% der Punkte Ü-Zettel

Aktive Teilnahme: Jeder muß einmal
vorreden

Schwerpunkte der Vorlesung

• Relativistische Quantentheorie

bisher: QM für nichtrelativistische Systeme

jetzt: relativistische Formulierungen

Klein-Gordon-Gleichung

Dirac-Gleichung

Spin, Feinstruktur des H-Atoms

• Vielteilchen-Quantenmechanik

- Systeme identischer Teilchen, Pauli-Prinzip
(entw. ansatzweise schon in der statist. Physik, jetzt aus der Sicht der QM)

- 2. Quantisierung (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren)

- Näherungsmethode für Vielteilchen-Systeme
(Hartree-Fock-Gl., Austauschwechselwirkung)

• Streutheorie :

Streuung von Teilchen an Teilchen oder Materie

Literatur

• Nolting: Quantenmechanik II, Vielteilchentheorie

• Schweber: Höhere Quantenmechanik

U. Scheitz: Quantenmechanik

0. Wiederholung von Elementen der Quantenmechanik

a) Beschreibung des Zustands eines Systems

(Ket-) Vektor im Hilbertraum $|\psi(t)\rangle$

Zugehöriger bra-Vektor $\langle\psi(t)|$

es gibt Skalarprodukt

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle \quad (= \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*)$$

normierte Zustände: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

Darstellung:

$$\langle\underline{r}|\psi(t)\rangle = \psi(\underline{r}, t)$$

„Wellenfunktion“ (i.a. komplex)

$$|\psi(\underline{r}, t)|^2 = \psi(\underline{r}, t) \psi^*(\underline{r}, t)$$

Aufenthaltswahrscheinlichkeit

alternativ:
Impulsdarstellung

$$\langle p | \psi(\epsilon) \rangle = \tilde{\psi}(p, \epsilon)$$

Übergang zwischen den Darstellungen:

$$\langle N | \psi \rangle = \langle N | \hat{1} | \psi \rangle = \int dp \langle N | p \rangle \langle p | \psi \rangle$$

"Einschieben einer Eins"

benutze $\hat{1} = \int dp |p\rangle \langle p|$

Eigenzustand
des Impulsoperators
↓
p
↑
Projektoroperator

benutze $i\hbar p \cdot N$

$$\langle N | p \rangle = c e$$

Ortsdarstellung der Impulseigenzustände
c Konstante, $c = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle N | \psi \rangle}_{\psi(N)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int dp e^{i\frac{p \cdot N}{\hbar}} \tilde{\psi}(p)$$

entspricht Fouriertransformation

(analog: $\hat{1} = \int dx |x\rangle \langle x|$)

↑
Eigenzustände des
Ortsoperators

Skalarprodukt im Ortsraum:

$$\begin{aligned}\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= \langle \psi_1 | \hat{1} | \psi_2 \rangle \\ &= \int d\mathbf{r} \langle \psi_1 | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \psi_2 \rangle \\ &= \int d\mathbf{r} \psi_1^*(\mathbf{r}) \psi_2(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Eigenwertproblem

$$\hat{A} |n\rangle = a_n |n\rangle$$

Operatoren, typischerweise hermitisch

(hier sind $|n\rangle$ die Eigenzustände, a_n sind die Eigenwerte)

$$\sum_n \underbrace{|n\rangle \langle n|}_{\text{Projektor}} = \hat{1} \quad \text{Vollständigkeitsrelation}$$

$$\langle n | m \rangle = \delta_{nm} \quad \text{Orthogonalität}$$

Hat man drei Eigenzustände, so kann man einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ danach entwickeln

$$\begin{aligned}|\psi(\epsilon)\rangle &= \sum_n c_n(\epsilon) |n\rangle \\ \Rightarrow c_n(\epsilon) &= \langle n | \psi(\epsilon) \rangle\end{aligned}$$

b) Messungen

- Messe eine Observable \hat{A} im Zustand $|\psi\rangle$

mögliche Messwerte

bei einer ~~Einzel~~ Einzelmessung:

Eigenwerte a_n von \hat{A}

Erwartungswert bei vielen Messungen mit identisch präparierten Ausgangszuständen:

$$\begin{aligned}\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle &= \langle \psi | \hat{1} \hat{A} \hat{1} | \psi \rangle \\ &= \sum_n \sum_{n'} \langle \psi | n \rangle \underbrace{\langle n | \hat{A} | n' \rangle}_{a_n \delta_{nn'}} \langle n' | \psi \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle &= \sum_n a_n |\langle \psi | n \rangle|^2 \\ &= \sum_n a_n |c_n|^2\end{aligned}$$

Bei vielen Messungen von \hat{A} im Zustand $|\psi\rangle$ tritt jeder Eigenwert a_n mit Wahrsch. $|c_n|^2$ auf

Beachte auch: Durch die Messung geht $|\psi\rangle$ in den jeweiligen Eigenzustand über $|\psi\rangle \rightarrow |n\rangle$

Abweichungen

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle$$

$$\text{mit } \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

$$= \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$$

Messe verschiedener Observable \hat{A} , \hat{B}

dann gilt

$$\frac{\Delta A \Delta B}{\sqrt{\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle}} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \quad \text{Heisenbergsche Unschärferelation}$$

bekanntes Beispiel

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Gleichzeitige schärfe Messung ist nur möglich,
falls Kommutator verschwindet !!

beachte auch:

Kommutierende Operatoren \hat{A} , \hat{B} haben dieselbe
Eigenzustände .. Aber nicht dieselbe Eigenwert

$$\text{Bsp. } \hat{L}^2, \hat{L}_z \quad \hat{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle \\ \hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$$

c) Darstellung von Operatoren

quantenmechanische Observablen werden dargestellt durch lineare Operatoren im Hilbertraum

adjungierte Operatoren:

$$\text{Sei } \hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle \psi | \hat{A}^\dagger = \langle \phi |$$

Skalarprodukt (Mahixelemet)

$$\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

Selbstadjungierter Operatoren:

$$\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle = \langle \hat{A} \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \hat{A} \psi_1 \rangle^*$$

$$\text{also } \hat{A}^\dagger = \hat{A} \quad !!$$

Selbstadjungiert, hermitesch

speziell: $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle = |\psi\rangle$

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \hat{A} \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^*$$

Erwartungswert ist reell !!

⇒ Physikalische Observablen werden dargestellt durch hermitesche Operatoren

Unitärer Operator:

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{1}$$

d) Dynamik von Quantensystemen

zeitabhängige Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

↑
Hamiltonoperator

Formale Lösung (falls \hat{H} zeitunabhängig)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi(t=0)\rangle$$

|
 $|\psi(0)\rangle$

$$= \hat{U}(t, 0) |\psi(0)\rangle$$

Zeitentwicklungsoperator (unitär)

Def. über Potenzreihe:

$$\hat{U}(t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} t\right)^n \hat{H}^n$$

adjungierte Schrödingergleichung:

$$\langle \psi(t) | \hat{H} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) |$$

Zeitunabhängige Schrödingergl.:

$$\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle \quad \text{Eigenwertgleichung}$$

/ ↗
Eigenzustände (zeitunabhängig)

Energie-Eigenwert

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{E}{\hbar}t} |\varphi\rangle$$

Dynamik der Erwartungswerte

betrachte $\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \langle \hat{A} \rangle$
und leite einmal ~~mal~~ nach der Zeit ab
und benutze die Schrödingergleichung

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \frac{1}{i} \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

Folgerung:

falls $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$ und $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$, dann ist
 \hat{A} Erhaltungsgröße

relevant bei:
explizite Zeitabhängigkeit
von \hat{A}

(Analogie zur Klass. Mechanik:

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \\ = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Bilder

Schrödingerbild: Operatoren zeitunabhängig
Zustandsvektoren zeitabhängig
Dyn. Gl.: Schrödingergleichung

Heisenbergbild der Dynamik

Operatoren werden zeitabhängig

Relation zu den Schrödingeroperatoren (\hat{A}_S)

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{A}_S \hat{U}(t, 0)$$

mit $\hat{U}(t)$