

English Summary:

1. Dynamical systems and deterministic chaos

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t) \quad \begin{array}{l} \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ dynamical variables} \\ \underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ vector field} \end{array}$$

$\phi: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M$  flow of the vector field  $\underline{F}$

$\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; \underline{x}_0)$  ensemble of all trajectories

Stability of fixed point  $\underline{x}^*$  ( $0 = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*)$ )

$$\delta \dot{\underline{x}} = (DF)_{\underline{x}^*} \delta \underline{x} \quad \text{with Jacobian } (DF)_{\underline{x}^*} \equiv A, \quad \delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^*$$

$$\text{ansatz } \delta \underline{x} = \underline{\xi} e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi} \Rightarrow \text{eigenvalues } \lambda_k$$


Beispiel für ein dynamisches System:

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma \dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$$

Reibung

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 = -mgl \sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} x_1 = \varphi \\ x_2 = ml^2 \dot{\varphi} \end{array}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

} Fixpunkte ungeschädigt

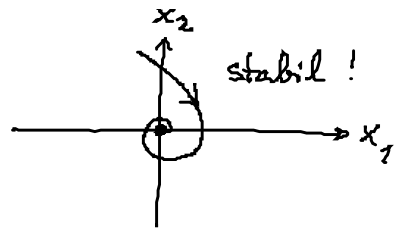
Linearisierung:  $\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl \cos x_1 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

a)  $x_1 = x_2 = 0$   $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -2\gamma \end{pmatrix}$

Eigenwerte:  $\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \frac{g}{l} = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$  (schwache Reibung  $\gamma^2 < \omega^2$ )

(a<sub>1</sub>) gedämpfte Schwingungen  
(schwache Reibung)

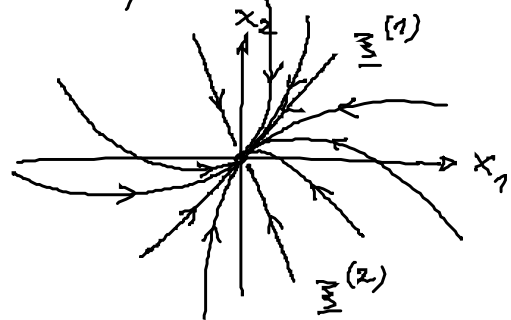


stabiler Fokus

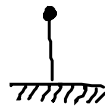
(a<sub>2</sub>) aperiodische gedämpfte Bewegung  
(überdämpfte Osz.)

starke Reibung ( $\gamma^2 > \omega^2$ ):  $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

stabiler Knoten



b)  $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = 0$



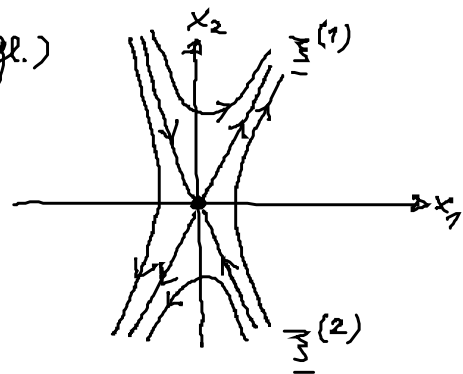
$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega^2 = 0 \quad (\text{char. gl.})$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}$$

$$\lambda_1 > 0$$

$$\lambda_2 < 0$$

instabil!



Sattelpunkt

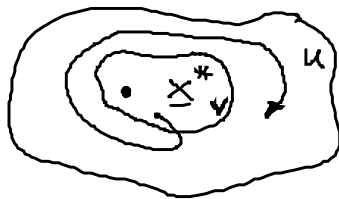
## 1.2 Stabilität und Langzeitverhalten

allg. Def. der Stabilität:

Sei  $\underline{x}^*$  Fixp. des dynam. Systems  $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$

Def.:  $\underline{x}^*$  heißt stabil (oder Lyapunov-stabil),  
wenn zu jeder Umgebung  $U$  von  $\underline{x}^*$  eine  
Umgebung  $V$  um  $\underline{x}^*$  existiert, so dass

$$\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$$



Def.:  $\underline{x}^*$  heißt asymptotisch stabil, wenn zu  $\underline{x}^*$   
eine Umgebung  $U$  ex., so dass

$$\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$$

für  $0 < t_1 < t_2$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$$



( $U$  schrumpft mit wachsendem  $t$  auf  $\underline{x}^*$  zusammen,  
d.h. Phasenraumvolumina schrumpfen)

Widerspruch

$\Leftrightarrow$  Liouville'scher Satz für Hamilton'sche Systeme  
(konstantes Phasenraumvol.)

Def.: Ein dynamisches System heißt dissipativ,  
wenn Phasenraumvolumina schrumpfen  
(kontrahieren).

Kriterium für (Lyapunov-)Stabilität (lokal):

Wenn  $\underline{x}^*$  stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix  $(DF)_{\underline{x}^*}$  einen pos. Realteil.

Beispiel: Fixpunkt a) ( $\varphi=0$ ) des Pendels mit/ohne Reibung  
Hinreichende Bed. für asymptot. Stabilität:

Alle Eigenwerte haben negative Realteile.

Beispiel: Fixpkt. a) des Pendels mit Reibung

Beispiel für Instab.: Fixpkt. b) ( $\varphi=\pi$ )

Allg. System mit  $n=2$

$$\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda) - A_{21}A_{12} \\ = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} - \lambda(A_{11}+A_{22}) + \lambda^2 = 0$$

Eigenwerte aus der char. gl.:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0 \\ = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\ = \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det A = \lambda_1\lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A})$$

$$\operatorname{tr} A = \sum_i \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)_* = \operatorname{div} \underline{F}$$

## Fallunterscheidung

- (a) stabiler Fokus :  $\det A > 0$  ,  $\operatorname{tr} A < 0$   
 (Strudelpunkt)  $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$   
 $\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega$  ( $\lambda_0, \omega > 0$ ) gedämpfte Osz. im Phasenraum



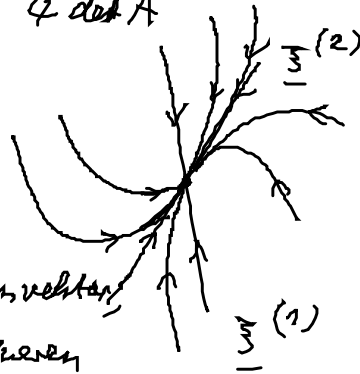
ellipt. Spirale

- (b) instabiler Fokus :  $\det A > 0$  ,  $\operatorname{tr} A > 0$   
 $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$   
 $\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega$  ( $\lambda_0, \omega > 0$ ) entdämpfte Osz.



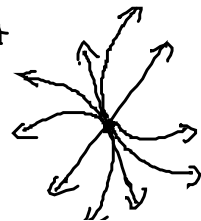
- (c) stabiler Knoten :  $\det A > 0$  ,  $\operatorname{tr} A < 0$   
 $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$

$\lambda_1 < 0$   
 $\lambda_2 < 0$  exp. Zerfall



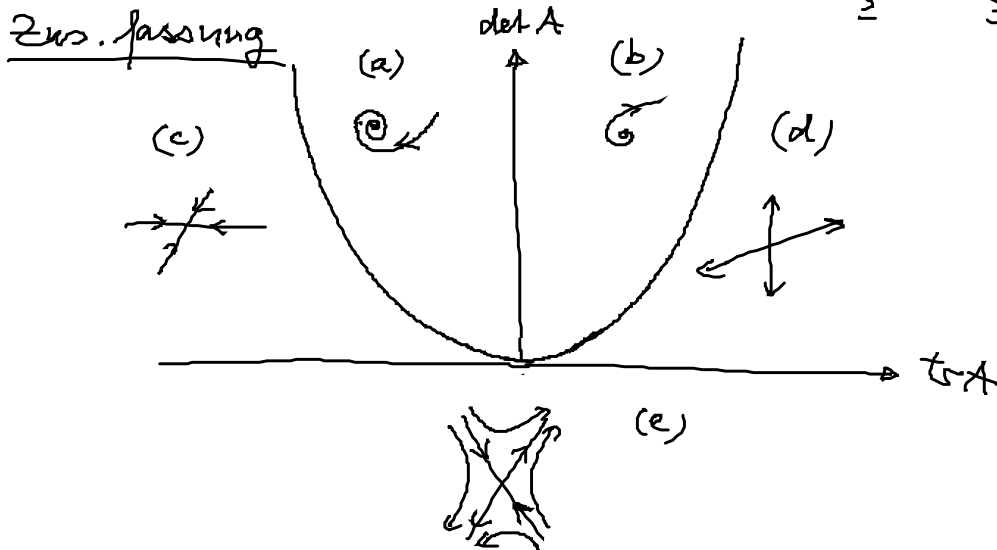
(fast alle Trajektorien nähern sich längs dem Eigenvektor, der zum betragsmäßig kleineren Eigenwert gehört)

- (d) instabiler Knoten :  $\det A > 0$  ,  $\operatorname{tr} A > 0$   
 $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$   
 $\lambda_1 > 0$   
 $\lambda_2 > 0$  }  $\in \mathbb{R}$  exp. Entdämpfung



(e) Sattelpunkt :  $\det A < 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$



Grenzen zwischen den 5 Bereichen: entastete Fälle

- lin. Stab. analyse versagt, höhere Terme der Taylorentwicklung um Fixpt. nötig.  
 $\text{tr} A = 0, \det A > 0$  : entweder Zentrum oder schwach stabiler/instabiler Fokus ungedämpfte Osz.
- qualitative Änderungen im Verhalten des Flusses möglich  
 (Bifurkationen = Verzweigungen der Lösungsmannigfaltigkeit)