Theoret. Physik VI: Vertiefung (Nichtlin. Dynamik u. Kontrolle)

VL SS 2018 Eckehard Schöll

Masterstudiengang Physik: Pflichtvorles. TP V / VI (grundlagen-orientiert)
11 + 10 ECTS 2 Scheine

anwend. orientiert: TP V oder TP VI

VL Di + Do 8:15 – 10:00 EW 203

UE Mo (ab 30.4.) 12:15 – 13:45 EW 731 : A. Zakharova

Ergänzendes Seminar: "Dynamics and control of complex networks"
(Nichtlin. Dynamik)
Di 16:15 – 17:00 EW 731

- VL kann auch als Wahlpflichtfach (8 SWS, 1 Schein, 12 ECTS) im Masterstudiengang kombiniert werden mit
  - Seminar "Dynamics and control of complex networks" 3233 L 607

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2018

Inhalte der VL

1. Dyn. Systeme
2. Kontrollkonzepte der nichtlin. Dynamik
3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren
4. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen
5. gekoppelte Systeme u. Netzwerke
6. Anwendung auf Neurodynamik
7. Chimera-Zustände

1. Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

Fragestellungen der Nichtlinearen Dynamik:

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollpar.)
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- Abhängigkeit von Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss, d.h. die Gesamtheit aller Bahnen
- geordnete oder ungeordnete (chaot.) Lösungen

Qualitative Dynamik: Fluss als Ganzes, Stabilität, topolog. Struktur, Langzeitverhalten

1.1 Vektorfelder als dynamische Systeme

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System von (nichtlin.) Dgln. 1. Ordnung formulieren:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{dyn. Var.}$$

$$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n \quad \text{Vektorfeld}$$

determinist. dyn. System

z.B. Newton'sche Beweg.gl. mit Reibung

$$\ddot{y} + \underbrace{f_1(y,t)}_{\text{Reibung}}\dot{y} + \underbrace{f_2(y,t)}_{\text{Kraft}} = 0$$

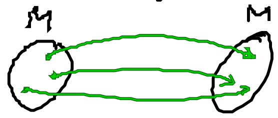
$$\left.\begin{aligned} x_1 &:= y \\ x_2 &:= \dot{y} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f_1(x_1,t)\,x_2 - f_2(x_1,t) \end{aligned}$$

speziell Hamilton'sche Systeme:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= q \\ x_2 &= p \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \qquad H(q,p) \ \text{Hamiltonfkt.}$$

Fluss des Vektorfeldes $\underline{F}$ auf der Mannigfaltigkeit M:
(Phasenraum, z.B. $\mathbb{R}^n$)

$$\phi : M \times \mathbb{R}_t \to M$$



mit $\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; x_0)$

(Gesamtheit der Bahnkurven
= Trajektorien)

Fixpunkte $\underline{x}^*$ des autonomen dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$
(stationäre Pkte., Gleichgewichtspkte., singuläre Pkte., krit. Pkte.)

$$0 = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*) \Rightarrow \underline{x}^*$$

Stabilität eines Fixpunktes:

Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen
$\delta\underline{x} : \underline{x} - \underline{x}^*$:

$$\boxed{\delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\underline{x}^*} \delta x_k}$$

$$\boxed{\delta\dot{\underline{x}} = (DF)_* \, \delta\underline{x}}$$ mit Jacobi-Matrix DF

System von lin. Dgl. mit konst. Koeff.

Lösungsansatz $\delta\underline{x}(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi}$

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$ Eigenwertgl.

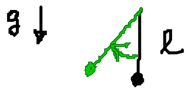
λ_k : Eigenwerte
$\underline{\xi}^{(k)}$: Eigenvektoren

$\Big\}$ der Jacobi-Matrix $(DF)_* \equiv A$

allg. Lösung: $\delta\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte λ_k
c_k durch Anfangsbed. bestimmt)

Beispiele (i) Ebenes Pendel $ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$

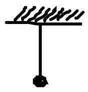


$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi \\ x_2 &= p_\varphi = ml^2\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 &= -mgl\sin x_1 \end{aligned}$$

Fixpkte. $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \; x_1 = n\pi \; (n = 0, 1, 2, \ldots)$

Linearisierung $$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) $x_1 = x_2 = 0$



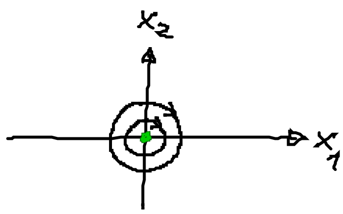
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} \overset{!}{=} 0$

$\Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$

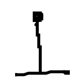
$\Longrightarrow \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$

<u>ungedämpfte Schwingungen</u>



Zentrum

b) $x_1 = \pi, \; x_2 = 0$



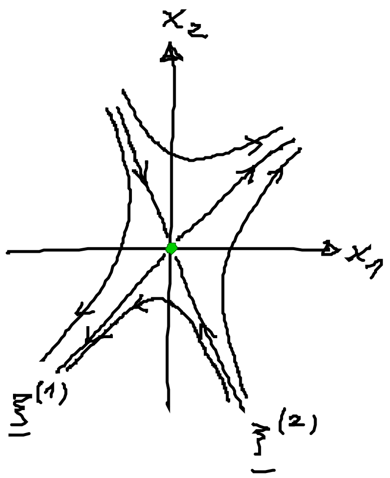
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & 0 \end{pmatrix}$$

„Segway"

$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$

Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$

allg. Lösung $\delta\underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$



Sattelpunkt

$t \to \infty$ ↓ ∞

instabil längs Richtung von $\underline{\xi}^{(1)}$

NB: Da Matrix A nicht symm. ist, sind die Eigenvektoren i.a. nicht senkrecht aufeinander!