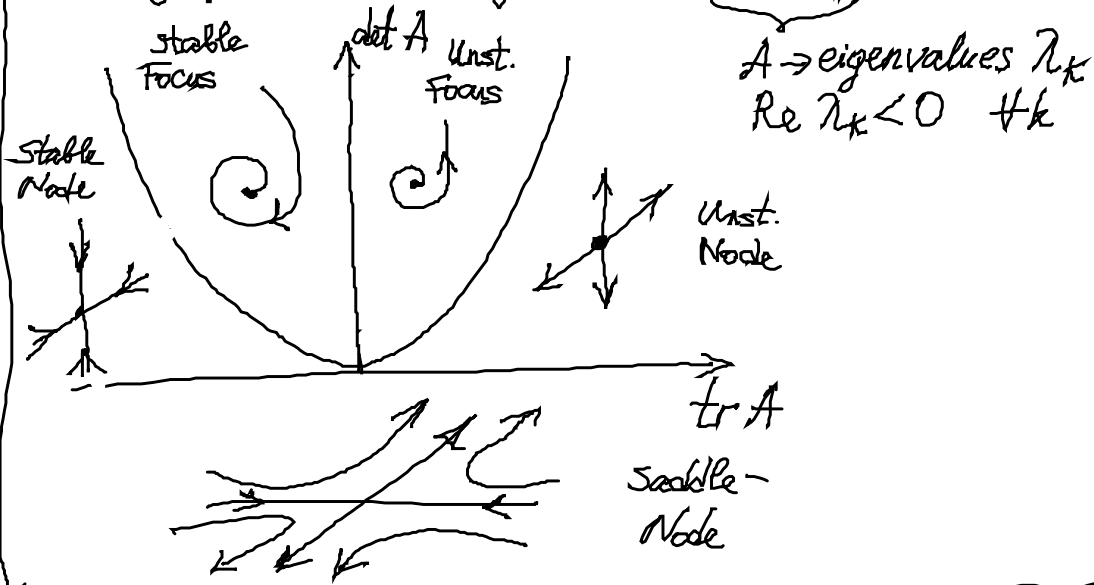


English Summary

Stability and long-time behavior

Asymptotic stability: $\dot{\underline{x}} = (DF)_* \underline{x}$



1.2.1 Langzeitverhalten von Hamilton'schen Vektorfeldern

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

f - Freiheitsgrade

$2f$ dyn. Größen

Linearisierung um Fixpunkt \underline{x}^*

$$\delta \underline{x}(t) = \underline{x} - \underline{x}^*$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

$$\underline{\dot{x}} = A \underline{x}$$

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k$$

$$\text{tr } A = \text{div } \underline{F} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{aus } \boxed{0 = \text{tr } A} = \sum_{i=1}^{2f} \lambda_i \text{ folgt,}$$

dass keine asymptotische Stabilität möglich ist (sondern nur Lyapunov-Stabilität)

Beweis: Falls asymptotisch stabil, müssen alle $\text{Re } \lambda_i < 0$ sein.

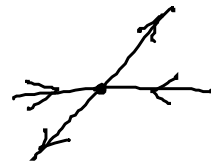
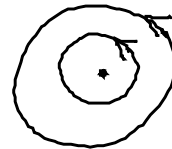
$$\Rightarrow \text{tr } A = \sum_i \text{Re } \lambda_i + \underbrace{i \sum_i \text{Im } \lambda_i}_{0, \text{ weil complex konjugiert}} < 0$$

Bsp möglich $\text{Re } \lambda_i = 0$
 $\lambda_i = \pm i\omega$ (Zentrum)

Falls $f=1$ ($n=2$): Fixpunkte können

nur Zentren (falls $\det A > 0$)
 oder

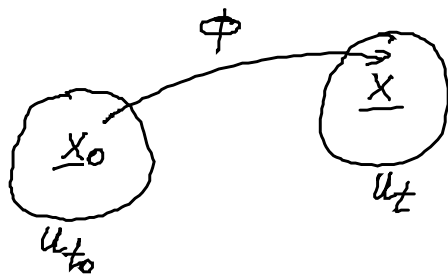
Sattelpunkt (falls $\det A < 0$) sein



Für Hamiltonsche Systeme folgt aus

$$\text{tr } A = \text{div } \underline{F} = 0$$

der Liouville'sche Satz der klass. statistischen Physik



$$\dot{x} = F(x)$$

$$A = (DF)_*$$

V_t : Phasenraumvolumen

$$V_t = \int_{U_t} d^{2f}x = \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \det D\Phi_t(x_0) =$$

$$\det(D\Phi_t(x_0)) \approx$$

$$\approx 1 + (t-t_0) \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i}$$

weil $\det(1 + \underline{B}\varepsilon) =$

$$= 1 + \varepsilon \text{tr} \underline{B} + O(\varepsilon^2)$$

$$V_t = \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \left[1 + \right.$$

$$\left. + (t-t_0) \sum_{i=0}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i} + \dots \right] =$$

$(\text{div} F)_{x_0}$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0$$

$$\Phi_t(x_0) = x(t) \approx x_0 + (t-t_0)\dot{x}$$

$$(D\Phi_t(x_0))_{ik} = \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k} \right) \approx$$

Taylor

$$\approx \underbrace{\frac{\partial x^i(t_0)}{\partial x_0^k}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k}}_{\frac{\partial}{\partial x_0^k} F_i} + \dots$$

$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \\ & 1 & \dots & \\ & & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}$

$$= V_{t_0} + (t-t_0) \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 (\text{div} F) + O(t-t_0)^2$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} V_t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t - t_0} =$$

$$= \int d^{2f} x_0 \underbrace{(\operatorname{div} F)_{x_0}}_{= 0} = \boxed{0}$$

0 für Hamilton'sche Systeme

Phasenraumvolumina erhalten,
d.h. Fluss inkompressibel!

1.2.2. Dissipative Systeme

Für dissipative Systeme gilt für kleine
Volumina die einen asymptotisch stabilen
Fixpunkt \underline{x}^* umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{U_t} d^{2f} x (\operatorname{div} F)_{x^*} = \Lambda \cdot V_t \Rightarrow$$

$$\boxed{V(t) = e^{\Lambda t} V_0} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Λ : Phasenraumkontraktionsrate

$$\Lambda := \operatorname{div} \underline{F} = \operatorname{tr} A = \sum_i \operatorname{Re} \lambda_i < 0$$

Allg. gilt

Def. Dissipative Systeme sind solche, die
Phasenraumvolumina kontrahieren.

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus)
heißen Senken oder Attraktoren.

Beispiel für dissipatives System: Lorenzmodell

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -xz + rz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

$\sigma, r, b > 0$

(abgeleitet aus der
Temperatur- und Strömungs-
verteilung einer
inkompressiblen Flüssigkeit
Rayleigh-Bénard-System)

Linearisierung

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & r-x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \text{tr} A = -(\sigma + 1 + b)$$

$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ Phasenraumvolumina schrumpfen monoton!

Hermann Haken: semiklass. Lasergleichungen
(Maxwell-Bloch-Gleichungen)
sind äquivalent zu den Lorenzgleichungen.

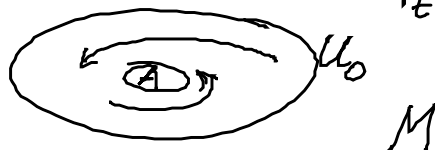
Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch Attraktoren bestimmt.

Def Sei F ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$.


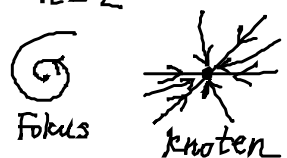

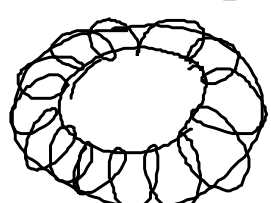
Eine abgeschlossene, unter dem Fluss Φ_t invariante ($\Phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt Attraktor, falls

(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A)
mit $\Phi_t(U_0) \subseteq U_0$ ($t > 0$)

(ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0 \exists T > 0$, so dass
 $\Phi_t(U_0) \subset V$ ($t > T$)



d.h. es gibt ein Attraktorbecken U_0 , aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor läuft.
 NB. Es kann mehrere koexistierende Attraktoren auf M geben.

Mindestdim. n des Phasenraumes	Attraktor	Attraktor- dim.	
1	Stabiler Fixpunkt	0	$n=1$  $n=2$  Fokus knoten
2	Stabiler Grenzyklus (limit cycle)	1	 periodischer Orbit
3	Stabiler Torus T^2	2	 quasiperiodisch 2 Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$
3	Seltener Attraktor (strange)	$2 < d < 3$ fraktal	chaotic 