

## English Summary

### 1.2.1 Long time behavior of Hamiltonian vector fields

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \Rightarrow \operatorname{tr} A = \operatorname{div} \underline{F} = 0$$

phase space volume conserved

### 1.2.2 Dissipative systems

$$\frac{dV_t}{dt} = \int V_t \Rightarrow V(t) = V_0 e^{\lambda t}$$

dissipative systems  
phase space volume shrinks

$$\operatorname{div} \underline{F} = \operatorname{tr} A = \sum_i \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad (\text{asymptotically stable fixed point})$$

## 1.3 Bifurkationen

- Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollpar.  $\mu$ ?
- Zahl und Art der Attraktoren kann sich sklagartig bei einem krit. Wert  $\mu_c$  ändern  
→ Bifurkation („Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit“)
- Notwendige Voraussetzung = Nichtlinearität
- Verknüpft mit Stabilitätswechsel → untersuche lineare Stab. der Fixpunkte (für lokale Bif.)

### Klassifizierung

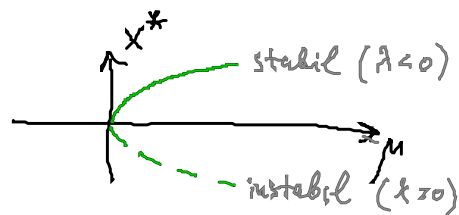
#### (A) Eigenwert-Null-Bifurkationen

$$\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$$

$$\det A > 0 \rightarrow \det A < 0$$

#### (A1) Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

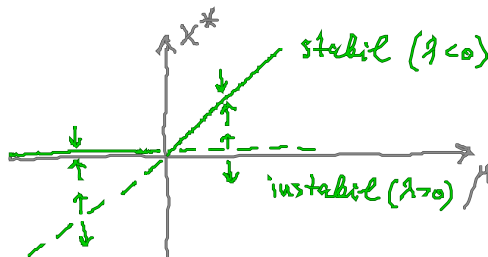


#### (A2) Transkritische Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad \delta \dot{x} = (\mu - 2x^*) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$$

stab. Wechsel bei  $\mu_c = 0$



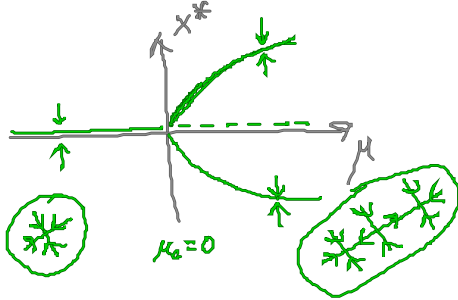
(A3) Stimmgabel - Bifurkation (pitchfork  $\mu_c = 0$ )

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad \delta \dot{x} = (\mu - 3x^{*2}) \delta x \quad \text{Bif.}$$

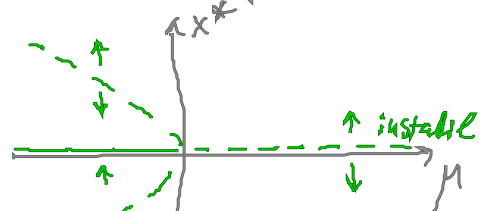
$$x^* = \begin{cases} \pm \sqrt{\mu} & (\text{für } \mu \geq 0) \\ 0 & \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \\ \mu & \text{stabil für } \mu < 0 \end{cases}$$

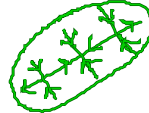
superkritische Bif.



subkritische Bif.



$$\dot{x} = \mu x + x^3$$



(B) Hopf - Bifurkation (Andronov-Hopf): superkritisch

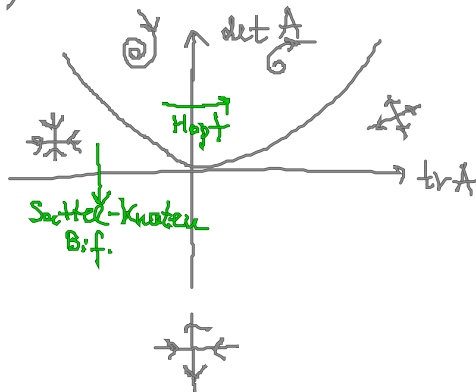
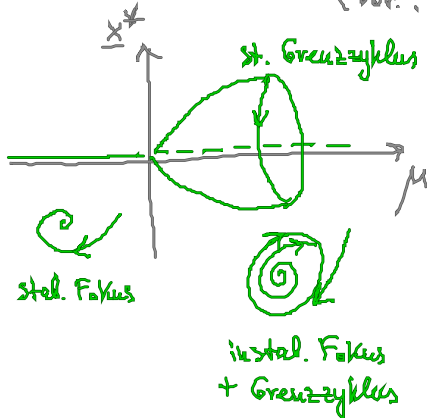
$$\lambda = \lambda_0 \pm i\omega \quad \text{mit } \lambda_0 < 0 \rightarrow \lambda_0 > 0$$

stabilen Fokus                      instab. Fokus

+ stab. Grenzzyklus

$$n=2: \text{tr} A < 0 \rightarrow \text{tr} A > 0$$

(Vor.:  $\det A > 0$ )



mind.  $n=2$  nötig!

Hopf - Normalform; generische Taylorentwicklung  
in der Nähe der Hopf-Bif. (z.B. -Zentrums - Mannigfaltigkeit)

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega \mp (1+i\gamma)|z|^2)z$$

lin. Anteil

nichtlin. Anteil

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

⇓ Bifurkation eines Grenzzyklus  
(Limit cycle LC)  
= period. Orbit

$$\delta \dot{z} = (\lambda + i\omega) \delta z$$

Fixpkt.  $z=0$  }  $\lambda < 0$ : stab. Fokus  
Eigenwert  $\lambda + i\omega$  }  $\lambda > 0$ : instabil. Fokus

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \frac{\text{tr} A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr} A}{2}\right)^2 - \det A}$$

$$= \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2 - \omega^2}$$

$$= \lambda \pm i\omega$$

Trans. auf Amplitude  $r$  und Phase  $\varphi$ :

$$z(t) = r(t) e^{i\varphi(t)} \Rightarrow r e^{i\varphi_0} + i \dot{\varphi} r e^{i\varphi_0} = (\lambda + i\omega \mp (1+i\gamma)r^2) r e^{i\varphi_0}$$

Re:  $\dot{r} = (\lambda \mp \gamma r^2) r \Rightarrow r=0$  oder  $r^2 = \pm \lambda$  ( $\lambda \geq 0$ )

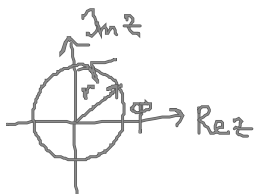
Im:  $\dot{\varphi} = (\omega \mp \gamma r^2)$   $\Rightarrow \dot{\varphi}_0 = \omega - \gamma \lambda$  Frequenz  
 $\varphi_0 = (\omega - \gamma \lambda) t$   
Amplitud. - Phasen - Koppl.

↓  
Periode  $T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}_0} = \frac{2\pi}{\omega - \gamma \lambda}$

Lös.:  $r=0$  (Fixpunkt)

$$z(t) = \sqrt{\pm \lambda} e^{i(\omega - \gamma \lambda)t}$$

Stuart-Landau-Oszillator



Bif. ( $\lambda=0$ )

$$\text{Amplitude } r = \sqrt{\pm \lambda} \rightarrow 0$$

$$\text{Frequenz } \omega \neq 0$$

Lin. Stabilität des LC

im allgemein: Floquet-Theorie

$$\dot{z} = f(z), \text{ period. Orbit } z^*(t) = z^*(t+T)$$

$$\delta \dot{z} = Df|_{z^*(t)} \delta z, \text{ mit } Df(t) = Df(t+T) \text{ lin. ODE mit period. Koeff.}$$

Lösung  $\delta z(t) = \sum_j c_j e^{\Lambda_j t} u_j(t)$  mit  $u_j(t) = u_j(t+T)$   
 Floquet-Mode

Floquet-Exponenten  $\Lambda_j \in \mathbb{C}$

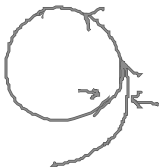
$$\Rightarrow \Lambda u + \dot{u} = Df u, \delta z(t) = U(t) \delta z(0)$$

Floquet-Multiplikatoren  $\mu = e^{\Lambda T}$  (stabil falls  $|\mu| < 1$ )  
 = Eigenwerte von  $U(T)$

hier: analyt. Lösung möglich in  $r, \varphi$ :

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{r} \\ \delta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mp 2r^2 & 0 \\ \mp 2\delta r & 0 \end{pmatrix} \bigg|_{z^*(t)} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ \mp 2\delta \sqrt{\pm \lambda} & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

Floquet-Exponenten sind die Eigenwerte von  $A$ :  $\Lambda^2 + 2\lambda \Lambda = 0$



$$\Lambda = \begin{cases} 0 & (\text{long. Bewegung LC}) \text{ Goldstone-Mode} \\ -2\lambda \gtrless 0 & (\lambda \lesseqgtr 0) \end{cases}$$

(transv. Floquet-Exp.)

Bifurkationsdiagramm:  
 superkritisch Hopf-Bif.  
 $\dot{z} = (\lambda + i\omega - (1+i\delta)|z|^2)z$

subkritische Hopf-Bif.  
 $\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1+i\delta)|z|^2)z$

