Meßprozesse

Wh:

a) Ausgang von Messungen

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \qquad (\text{Annahme: } \langle \psi | \psi \rangle = 1)$$

Mittelwert über sehr viele Messungen
mit identisch präparierten Ausgangszuständen $|\psi\rangle$

Unschärfe $\Delta A = \sqrt{\underbrace{(\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2)}_{\text{Streuung (positive Größe)}}}$ i.A. $\Delta A > 0$

Sei nun speziell $\Delta A = 0$ $\hat{=}$ alle Messungen ergeben genau dasselbe Ergebnis!!

$\Longleftrightarrow$ Zustand vor der Messung war ein Eigenzustand von $\hat{A}$!!
und $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = a_\psi$

Eigenwert von $\hat{A}$ zum Zustand $|\psi\rangle$!

Gleichzeitige Messung von zwei Observablen:
Heisenberg'sche Unschärferelation

Betrachte zwei Observable $\hat{A}$ und $\hat{B}$

Es gilt:

$$\underbrace{\Delta A \, \Delta B}_{\text{Produkt der Unschärfen von } \hat{A} \text{ und } \hat{B}} \geq \left| \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \quad (*)$$

Herleitung über Schwarz'sche Ungleichung
(s. z.B. Bücher von Messiah, FCG)

Bemerkungen:

i) (*) gibt eine untere Schranke für das Produkt der Unschärfen

ii) Für zwei vertauschende Observablen $\left([\hat{A},\hat{B}]=0 \right)$ gilt nach (*)

$$\Delta A \, \Delta B \geq 0$$

wobei $\Delta F \, \Delta G = 0$ genau dann, wenn der betrachtete Zustand ein gemeinsamer Eigenzustand der beiden Observablen ist !!

iii) Spezialfall: Orts-Impuls-Unschärferelation

$$\left| \frac{1}{2i} [\hat{p}_i, \hat{x}_k] \right| = \left| \frac{1}{2i} \frac{\hbar}{i} \delta_{ik} \langle \hat{1} \rangle \right| = \delta_{ik} \frac{\hbar}{2}$$

Komponente von $\hat{p}$ bzw $\hat{x}$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \Delta p_i \, \Delta x_k \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ik}$$

Zurück zur Messung einer Observablen $\hat{A}$

b) <u>Einfluß der Messung auf den Zustand des quantenmechanischen Systems</u>

betrachte gedanklich folgenden Meßprozess

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{Ergebnis } a']{\text{1. Messung von } \hat{A}} |\psi'\rangle \xrightarrow[\text{Ergebnis } a'']{\text{2. Messung von } \hat{A}} |\psi''\rangle$$

Ausgangszustand

Experimentell findet man:

$a'' = a'$ Die zweite Messung ergibt genau dasselbe Ergebnis wie die erste Messung!

$\Leftrightarrow$ d.h., die 2. Messung ist störungsfrei

Das kann nur sein, falls $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{A}$ ist und $a'' = a'$ der zugehörige Eigenwert

Folgerungen:

i) Auch beliebigem Ausgangszustand $|\psi\rangle$ sind die überhaupt möglichen Meßwerte die Eigenwerte von $\hat{A}$!

ii) Durch die Messung verändert sich der Zustand des Systems !!! (Wechselwirkung zw. System und Messung !!)

$\lightning$ zum klass. Bild!

Insbesondere:

Durch die Messung geht das System in einen der Eigenzustände von $\hat{A}$ über!

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{Messung}} |\psi'\rangle \quad \text{mit} \quad \hat{A}|\psi'\rangle = a'|\psi'\rangle$$
$$= a''|\psi'\rangle$$

Ausgangszustand

Man spricht von einer „Reduktion des Zustandsvektors" durch die Messung!!

c) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Messwerts

Motivation:

Nur falls der Ausgangszustand $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{A}$ ist, wird <u>mit Sicherheit</u> der zugehörige Eigenwert gemessen!

Ansonsten kann man nur Wahrscheinlichkeiten angeben!

Schreibe dazu den Erwartungswert um
$$\langle \hat{A} \rangle$$

Eigenwertgleichung

benutze $\hat{A}|n\rangle = a_n|n\rangle$, $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ und $\underline{\sum_{n=1}^{M} |n\rangle\langle n| = \hat{1}}$ (*)

diskretes Spektrum, orthonormierte Eigenzustände

Eigenzustände bilden eine Basis!!

Damit

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{1} \hat{A} \hat{1} | \psi \rangle$$

Ausgangszustand der Messung von $\hat{A}$, nicht notwendiger Eigenzustand!! ($\langle \psi | \psi \rangle = 1$)

Eigenzustand von $\hat{A}$!

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{M} \sum_{n'=1}^{M} \langle \psi | n \rangle \underbrace{\langle n | \hat{A} | n' \rangle}_{\substack{a_{n'} \langle n | n' \rangle \\ = a_{n'} \delta_{nn'}}} \langle n' | \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \sum_{n=1}^{M} \langle \psi | n \rangle \, a_n \langle n | \psi \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{M} a_n \, |\langle n | \psi \rangle|^2$$

Eigenwert!

Dies legt folgende Definition nahe.

$|\langle n | \psi \rangle|^2 = w_n$ Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Messwertes a_n.

a_n ist Eigenwert von $\hat{A}$!

$$\Rightarrow \boxed{\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle = \sum_{n=1}^{M} a_n w_n}$$

Erwartungswert von $\hat{A}$ $\hat{=}$ Mittelwert über die Eigenwerte, deren Wahrscheinl. durch w_n gegeben ist!!

(Mittelwert über sehr viele Messungen von $\hat{A}$ mit identischen Ausgangszuständen)

<u>Bemerkungen</u>

a) Obige Definition von w_n ist $\overset{\text{formal}}{\text{konsistent}}$ mit unserer frühen Definition von Aufenthaltswahrscheinlichkeiten (Schrödinger'sche Wellenmechanik)

$$\rho(\underline{r}) = \psi(\underline{r})\,\psi^*(\underline{r})$$
$$= \langle \underline{r}|\psi\rangle\langle\psi|\underline{r}\rangle = |\langle \underline{r}|\psi\rangle|^2$$

b) aus $\langle\hat{A}\rangle = \sum_{n=1}^{M} a_n w_n$ mit $w_n = |\langle n|\psi\rangle|^2$

folgt: Wenn $|\psi\rangle$ bereits ein Eigenzustand ist, also $|\psi\rangle = |n'\rangle$

dann gilt: $w_n = |\langle n|n'\rangle|^2 = |\delta_{nn'}|^2$

$$= \begin{cases} 1 \,, & \text{falls } n = n' \\ 0 \,, & \text{sonst} \end{cases} \quad = \delta_{nn'}$$

Damit $\langle\hat{A}\rangle = \sum_{n=1}^{M} a_n \delta_{nn'}$

$= a_{n'}$

Nochmaliges Umschreiben mit Hilfe des Projektionsoperators

$$\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|$$

Projektionsoperator zum Zustand $|n\rangle$

(wir hatten $\sum_{n=1}^{M} |n\rangle\langle n| = \hat{1}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{M} \hat{P}_n = \hat{1}$$)

Folgerungen aus dieser Definition:

$$\hat{P}_n |m\rangle = |n\rangle\langle n|m\rangle$$
$$= \delta_{nm} |n\rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ |n\rangle, & m = n \end{cases}$$

$|m\rangle$ sei auch Element der Basis, d.h. $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$

$\hat{P}_n$ beantwortet die Frage:
Ist das System im Zustand $|n\rangle$?

Außerdem:

wir hatten: $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

Zweimaliges Einschieben der $\hat{1}$

$$= \sum_{n=1}^{M} a_n \langle \psi | \underbrace{n\rangle\langle n}_{\text{entspricht } \hat{P}_n \text{ !!}} | \psi \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{M} a_n \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{M} a_n \langle \hat{P}_n \rangle \quad !$$

$$\overset{!}{=} \sum^{M} a_n w_n$$

$n=1$

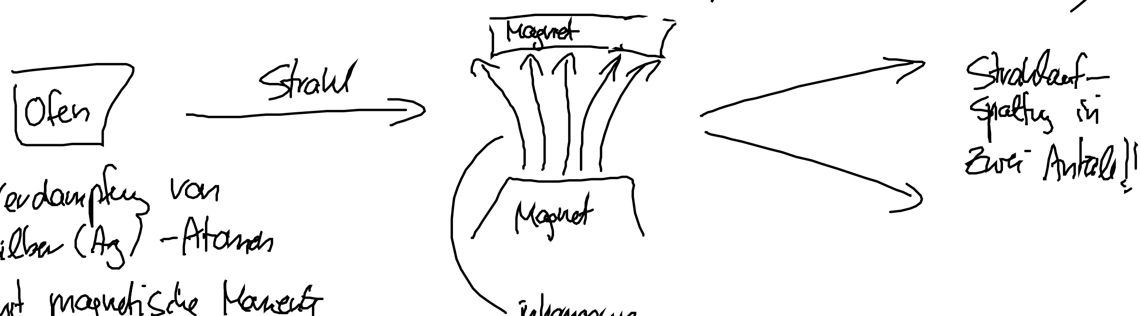
$$\Rightarrow \boxed{w_n = |\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle \hat{P}_n \rangle = \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle}$$

Sei speziell der Ausgangszustand $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand,
z.B. $|\psi\rangle = |m\rangle$

$$w_n = \langle \hat{P}_n \rangle = \langle m | \hat{P}_n | m \rangle$$
$$= \langle m|n\rangle\langle n|m\rangle = \delta_{nm}\delta_{nm} = \delta_{nm}$$

Illustration: <u>Stern–Gerlach–Versuch</u>

(gleichzeitig der erste Hinweis auf die Existenz des Spins eines Elektrons!!)



Verdampfen von Silber (Ag)-Atomen mit magnetischem Moment

$\underline{\mu} \sim \underline{S}$

vom 5s-Elektron: Drehimpuls des Elektronenspins

(Bahndrehimpuls und Spins der rest. Elektronen heben sich auf)

<u>inhomogenes</u> Magnetfeld $\underline{B}$ in z-Richtung

$\Rightarrow$ auf jedes Silberatom wirkt eine Kraft

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_z \underbrace{\frac{\partial B}{\partial z}}_{\neq 0} \end{pmatrix}$$

μ_z: z-Komponente des magnet. Moments

Interpretation / Diskussion

- Vor Eintritt des Strahls in das inhomogene $\underline{B}$-Feld sind die Richtungen von $\underline{\mu}$ regellos verteilt!!

- $\underline{B}$-Feld führt zu einer Strahlaufspaltung, „Richtungsquantelung"

denn: die Projektion des Spins auf die Feldrichtung (z-Richtung) kann nur zwei diskrete Werte annehmen.

$$\mu_z \sim \pm \frac{1}{2}$$

Inhomogenität des Feldes $\Rightarrow$ positive oder negative Kraft je nach Vorzeichen von μ_z!!

Interpretation als Meßprozess

- Die beiden Strahlen nach Durchlaufen des Magnetfeldes entsprechen den Eigenzuständen $|\phi_+\rangle$, $|\phi_-\rangle$ des magnetischen Moments $\hat{\underline{\mu}}$ zu den Eigenwerten $\mu_z \sim \pm \frac{1}{2}$

- Wahrscheinl. für das Eintreten eines bestimmten Meßwertes

$$w_+ = |\langle\psi|\phi_+\rangle|^2 = \langle \hat{P}_{\phi_+} \rangle$$
$$w_- = |\langle\psi|\phi_-\rangle|^2 = \langle \hat{P}_{\phi_-} \rangle$$

III. 9. Die Axiome der Quantenmechanik

1) Zustand des quantenmechanischen Systems

→ Zustandsvektor $|\psi\rangle$ im Hilbertraum

2) Physikalische Observable (Meßgröße) A

→ hermitescher Operator $\hat{A}$ (mit $\hat{A}^+ = \hat{A}$)

3) Messungen

i) Mittelwert der Observablen bei vielen Messungen mit identischen Ausgangszuständen $|\psi\rangle$ ergibt den

$$\Rightarrow \text{Erwartungswert } \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_{n=1}^{M} a_n \, w_n$$

mit a_n: Eigenwert
w_n: $|\langle n|\psi\rangle|^2$
n: Eigenzustand

bzw. $w_n = \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle$

ii) Die möglichen Meßwerte einer Messung sind jeweils die Eigenwerte a_n

(Erwartungswert $\hat{=}$ Mittelwert über die Eigenwerte!)

iii) Durch die Messung wird der Zustand „reduziert“

$$|\psi\rangle \longrightarrow \underset{\text{Eigenzustand}}{|n\rangle} \qquad (\text{mit } \hat{A}|n\rangle = a_n|n\rangle)$$

4) Zeitentwicklung der Zustände: Schrödinger-Gleichung

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle}$$