Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Zur Motivation und Rolle der Quantenmechanik (QM) innerhalb der (Theoretischen) Physik

Stand der Physik ~ 1900

Klassische Theorien:

- Klass. Mechanik: Theorie der Bewegung materieller (großer) Körper im Raum und Zeit
  (Newton, Lagrange-Formalismus, Hamilton, Hamilton-Jacobi)

  Beschreibung des „Zustands" des klassischen Systems

Hamilton: $\underbrace{q_1(t), \dots q_f(t)}_{\text{generalisierte Koordinaten}}, \underbrace{p_1(t), \dots p_f(t)}_{\text{generalisierte Impulse}}$

Dynamik: Hamilton'sche Gleichungen (DGLs)

Anfangsbedingungen legen die Bewegung des Systems für alle Zeiten fest !!

$\Longrightarrow$ deterministische Theorie

- Klassische Elektrodynamik

Die zentralen Größen sind die elektrischen Felder $\underline{E}(\underline{r},t)$ und die magnetischen Felder $\underline{B}(\underline{r},t)$

$\Rightarrow$ Feldtheorie

Dynamik: Maxwell-Gleichungen

$\Rightarrow$ liefern z.B. die Beschreibung von Lichtwellen (elektromagnet. Wellen)

auch hier: deterministische Theorie!

- Klassische Thermodynamik

$\Rightarrow$ Beziehungen zwischen thermodynamischen Potentialen Energie, Wärme, Arbeit, Entropie

Grundgleichungen: 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Die klassischen Theorien versagen im Bereich der atomaren Dimensionen (und typischerweise auch bei sehr tiefen Temperaturen)

Beispiele für Phänomene, die durch die klass. Theorien nicht erklärbar sind:

- Verhalten von Festkörpern bei tiefen Temperaturen (spezifische Wärme, hier wichtig: Fermi-Statistik!)

- Kristallschwingungen (Phononen) und deren Statistik

- Supraleitung
- Suprafluidität
- Tunneleffekt
- Ferromagnetismus

} makroskopische Quantenphänomene!

- Atom- und Kernphysik

  (Spektren, Radioaktivität, Kernreaktion, Elementarteilchen)

- Chemie und Molekülphysik

  Periodensystem der Elemente, Molekülschwingungen, chemische Bindung

  ⋮

Also: Quantenmechanik: Theorie, die Abläufe in atomaren Dimension beschreibt (10^{-15} m $- 10^{-9}$ m)

Merkmale der Quantenmechanik:

∘ nicht-deterministisch!

- Grundgrößen (z.B. Impuls) sind nicht uneingeschränkt "scharf" messbar, sondern sind mit Unschärfen behaftet.

z.B. (sei i ein Teilchenindex)

$$\underbrace{\Delta q_i}_{\text{Unschärfe im Ort}} \underbrace{\Delta p_i}_{\text{Unschärfe im Impuls}} \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\boxed{\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad h \text{ Planck'sches Wirkungsquantum} \quad h = 6.624 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}}$$

– Ein Messprozess führt zu einer Störung des Systems!
(im Unterschied zu Phänomenen in der Alltagswelt)

- Lineare Theorie in dem Sinne, dass die dyn. Gleichungen linear in den quantenmechanischen Zuständen sind

- Erweiterungen der Quantenmechanik: (nicht in der Theor. Physik II, sondern später)
  – relativistische Quantentheorie
    (wichtig z.B. für Quantenoptik, also die Wechselwirkung zw. Licht und quantenmech. Materie)
    ⟹ Vorlesung Quantenmechanik II
  – Quantenstatistik
    Theorie von Vielteilchensystemen aus quantenmechan. Teilchen, z.B Festkörper bei tiefen Temperaturen, Photonen ..
    ⟹ Vorlesung Theoret. Physik IV Thermodynamik und Statistik

Inhalte dieser Vorlesung

I. Einführung, experimentelle Hinweise

II. Schrödinger'sche Wellenmechanik

→ Wellenfunktionen, Schrödingergleichung, Observablen.

III. Formalisierung der Quantenmechanik

→ Hilbertraum, Bilder, Meßprozesse, Zeitentwicklung...

IV. Drehimpuls und Spin

→ Wasserstoffatom, Ankopplung an äußere Felder

V. Näherungsmethoden

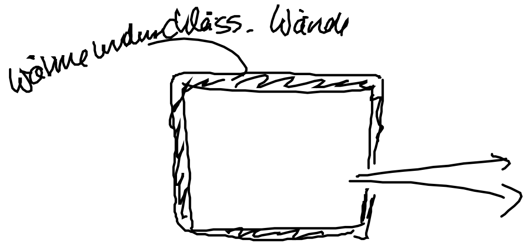
I: Einführung: Experimentelle Hinweise auf die Quantenmechanik

I.1. Planck'sches Strahlungsgesetz

→ Gesetz zur spektralen Energiedichte der Wärmestrahlung (d.h. einer Form von elektromagnetischer Strahlung) eines Festkörpers

alltägl.: Erfahrung: Festkörper können Wärme emittieren, bei sehr hohen Temperaturen „glühen" sie sogar

Messung durch „Schwarzen Körper": Körper, der fast alle auf ihn auftreffende Strahlung absorbiert



Restsstrahlung, die aus dem Körper entweicht

$\Leftrightarrow$ im wesentlich identisch mit der Wärmestrahlung, die von ihm auf die Wände fällt!

Spektrale Energiedichte

$$u = \frac{dU}{d\nu}$$

U: Energiedichte der elektromagnet. Strahlung:

Elektrodyn. $U = \frac{1}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\cdot\underline{D}(\underline{r},t) + \underline{H}(\underline{r},t)\cdot\underline{B}(\underline{r},t)\right)$

ν: Frequenz

Klassische Vorstellung

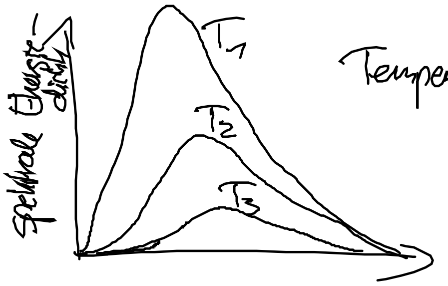
- Wärmestrahlung hat kontinuierliches Frequenzspektrum $0 \leq \nu \leq \infty$ (ν: Frequenz)

- Thermisches Gleichgewicht: Wände des Hohlraums emittieren und absorbieren Strahlung, beide Prozesse halten sich die Waage

⇒ Strahlung ist homogen und isotrop

(Beweis durch 2. Hauptsatz der Thermodynamik)

- Wärmestrahlung hängt nicht von der Beschaffenheit der Wände ab



Temperatur $T_1 > T_2 > T_3$

λ Wellenlänge $\left(\lambda \sim \frac{1}{\nu}\right)$

Erster Ansatz: Wien'sches Gesetz (1896)

$$u = \frac{dU}{d\nu} = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (*)$$

f Skalenfunktion, die nur vom Verhältnis $\frac{\nu}{T}$ abhängt

Folgerung: $$\underbrace{U(T)}_{\text{gesamte Energiedichte}} = \int_0^\infty d\nu \; u(\nu, T) \overset{*}{=} \int_0^\infty d\nu \; \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

$$= \underbrace{\ldots}_{\text{Variablensubstitution}} = \underbrace{\sigma}_{\text{Konstante}} T^4$$

„Stefan-Boltzmann Gesetz"

experimentell bestätigt!

Frage: Was ist $f(\frac{\nu}{T})$?

Vorschlag von Wien: $u(\nu,T) = \nu^3 \underbrace{a e^{-b\frac{\nu}{T}}}_{f(\frac{\nu}{T})}$

$a, b = \text{const}$

Es stellt sich heraus:

Nur kompatibel mit den experimentellen Ergebnissen
bei niedrigen Temperaturen und hohen Frequenzen, also $b\frac{\nu}{T} \gg 1$

Alternativvorschlag zur Skalenfunktion $f(\frac{\nu}{T})$
von Lord Raleigh (1900)

Ausgangspunkte

i) Energie U des elektromagnet. Feldes im Hohlraum
wird erzeugt durch System stehender elektr. und magnet. Wellen
im Hohlraum ($\rightarrow$ VL Elektrodynamik)

ii) Thermodynamik: Jede stehende Welle liefert einen Beitrag
von $\frac{1}{2} k_B T$ zur Energie !!

„Klassischer Gleichverteilungssatz"

(k_B: Boltzmannkonstante)

⇒ Ansatz für die spektrale Energiedichte und damit auch die Strahlenfunktion

$$u(\nu,T) = \underbrace{\frac{dN(\nu)}{d\nu}}_{\substack{\text{Zustandsdichte} \\ \text{(Anzahl der} \\ \text{vorkommenden Frequenzen)}}} \cdot \overset{\text{zwei Polarisationsrichtungen}}{2} \cdot \overset{\text{elektr. und magnet. Wellen}}{2} \cdot \frac{k_B T}{2}$$

$$= \ldots = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} k_B T$$

$$= \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

$$\text{mit } \boxed{f\left(\frac{\nu}{T}\right) = 8\pi \frac{k_B}{c^3} \frac{T}{\nu}}$$

Rayleigh-Jeans-Formel

ok für kleine Frequenzen ν, aber völlig im Widerspruch zu Experimenten bei hohen ν !!

Das sieht man auch daran, dass

$$U(T) = \int_0^\infty d\nu \underbrace{u(\nu,T)}_{\sim \nu^2} = \infty$$

„Ultraviolett-Katastrophe"

Lösung: Planck !!