

Ideales Fermigas - Zustandsgleichungen (kalorisch)

Entartet

$$u \approx \frac{3}{5} \bar{U} E_F \left( 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right) \quad \beta \gg 1$$

Nicht-Entartet

$$u \approx \frac{3}{2} kT \bar{U} \left( 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{U}}{V N_c(T)} \right) \quad N_c(T) \sim T^{3/2}$$

## 4.5. Ideales Bosegas

analog wie Fermigas, nur Besetzungszahlen diesmal

$$N_j = 0, 1, 2, \dots$$

↳ nummeriert Energiezustände

Großkanonische Zustandssumme

$$Z_{GK} = \sum_{N_1, \dots, N_L} e^{-\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j}$$

$$\stackrel{\text{Bosonen}}{=} \prod_j \sum_{N_j=0}^{\infty} t_j^{N_j} \quad \text{mit } t_j = e^{\beta(\mu - E_j)}$$

$$= \prod_j \frac{1}{1 - t_j} = \prod_j \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - E_j)}}$$

geometrische Reihe  
konvergiert, wenn  $t_j < 1$   
also  $E_j > \mu$

Wahrscheinlichkeit, die Besetzungszahl  $N_1, N_2$  der 1-Teilchen Zustände  $E_1, E_2, \dots$  zu finden

$$P(N_1, N_2, \dots) = \frac{1}{Z_{GK}} e^{-\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j}$$

$$= \prod_j \underbrace{(1-t_j) t_j^{N_j}}_{p(N_j)}$$

separiert!

$$p(N_j) = \underbrace{(1 - e^{-\beta(\mu - \epsilon_j)})}_{\varphi_j} e^{\beta(\mu - \epsilon_j) N_j}$$

Mittlere Besetzung im Zustand  $\epsilon_j$ :

$$\alpha = \beta\mu$$

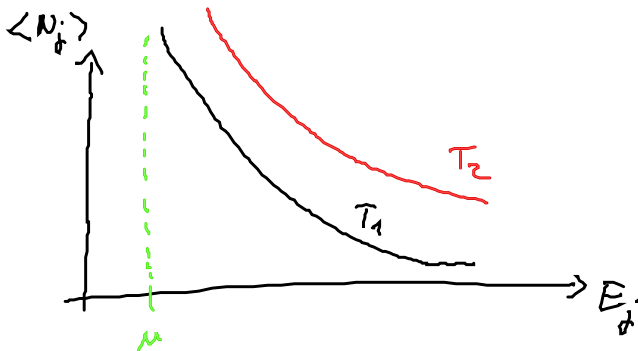
$$\langle N_j \rangle = \frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \varphi_j$$

$$= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(1 - t_j) = \frac{t_j}{1 - t_j}$$

$$= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1}$$

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_j - \mu}{kT}} - 1}$$

Bose-Verteilung

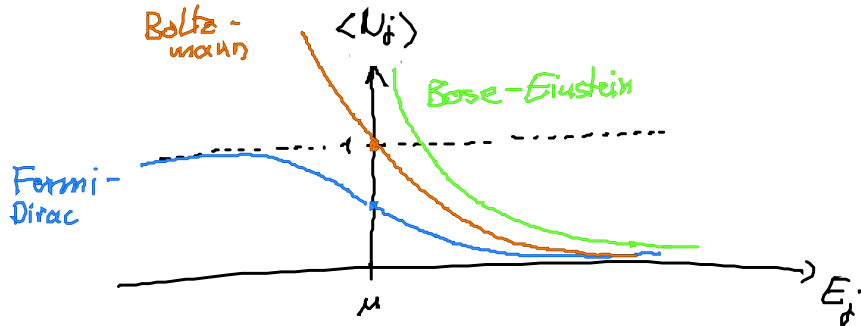


$T_1 < T_2$  divergiert für  $\epsilon_j \rightarrow \mu$

## Vergleich aller 3 Verteilungen

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_j - \mu}{kT}} - \epsilon}$$

mit  $\epsilon = \begin{cases} -1 & \text{Fermi-Dirac} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltzmann} \\ 1 & \text{Bose-Einstein} \end{cases}$



"Übergang zum Quasikontinuum der Zustände  $E = \frac{p^2}{2m}$ "

$$\ln Z_{GK} = \sum_j \ln \Xi_j = - \sum_j \ln (1 - \gamma e^{-\beta E_j})$$

( $\gamma = e^{\beta \mu}$  Fugazität)

$$\approx -(2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln (1 - \gamma e^{-\beta \frac{p^2}{2m}})$$

part. Integration

$$= -(2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \left\{ \frac{p^3}{3} \ln (1 - \gamma e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}) \right\}_0^\infty - \int_0^\infty dp \frac{p^3}{3} \frac{\frac{\beta p}{2m} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}{1 - \gamma e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}$$

$$= \frac{2}{3} \beta (2s+1) \frac{V}{h^3} \int_0^\infty dp 4\pi p^2 \langle N(p) \rangle E(p)$$

$$= \frac{2}{3} \beta U$$

$$\Rightarrow \boxed{pV = kT \ln Z_{\text{GK}} = \frac{2}{3} U} \quad \text{wie für Fermigas}$$

- Verdünntes Bosegas (quasi-klass., nichtentarteter Grenzfall)  
Entwicklung nach Potenzen von  $y = e^{\mu/kT} \ll 1$

$$\bar{N} = \sum_j \langle N_j \rangle \approx (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{e^{\frac{p^2/2m - \mu}{kT}} - 1}$$

$$y := \frac{p^2}{2mkT} \quad \text{Substitution}$$

$$= \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty dy \frac{y^{1/2}}{y e^y - 1} \quad (\text{Taylor})$$

$$\approx \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} \left\{ \underbrace{\int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-y}}_{\frac{1}{2} \sqrt{\pi}} + \underbrace{y^2 \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-2y}}_{\frac{1}{2^{5/2}} \sqrt{\pi}} \right\}$$

$$\bar{N} \approx V \frac{2S+1}{\lambda^3} \underbrace{e^{\mu/kT}}_y \left[ 1 + \frac{1}{2^{5/2}} e^{-\mu/kT} \right]$$

↑  
Quantenkorrektur

$$\lambda := \left( \frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{1/2} \quad \text{Therm. Wellenlänge}$$

$$= \left( \frac{2S+1}{n_c} \right)^{1/3}$$

Elim. von  $\mu$  durch  $\bar{U}$ :

0. Näherung  $\bar{U} = V \frac{2S+1}{\lambda^3} \eta$

1. Näherung  $\bar{U} = V \frac{2S+1}{\lambda^3} \eta \left[ 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{U} \lambda^3}{V(2S+1)} \right]$

$\Rightarrow \eta = e^{\mu/kT} \approx \frac{\bar{U} \lambda^3}{V(2S+1)} \left( 1 - \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{U}}{N_C} \right)$  (\*)

Innere Energie

$$U = (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\frac{p^2}{2m}}{e^{\left\{ \frac{p^2}{2m} - \mu \right\} / kT} - 1}$$

$$= \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} kT \int_0^\infty dy y^{3/2} \frac{y e^{-y}}{1 - y e^{-y}}$$

$$\approx \underbrace{\int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-y}}_{\frac{3}{4} \sqrt{\pi}} + \underbrace{\int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-2y}}_{\frac{1}{2^{5/2}} \frac{3}{4} \sqrt{\pi}} \dots$$

$$U \approx \frac{3}{2} kT V \frac{2S+1}{\lambda^3} e^{\mu/kT} \left[ 1 + \frac{1}{2^{5/2}} e^{\mu/kT} \right]$$

↳ Einsetzen von  $\textcircled{*}$

(kleine Dichten)

$$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[ 1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{V(2S+1)} \bar{N} \right]$$

↕ Quantenkorrekturen

$$pV = \frac{2}{3} U \approx kT \bar{N} \left[ 1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{VN_c} \right]$$

Isobarische  
Zustandsgleichung

thermische  
Zustandsgleichung

↑  
Bose - Anziehung : Quantenkorrektur  
(erniedrigter Druck)

### Bose - Einstein - Kondensation

(Theor.: Einstein 1925)

exp.: Ketterle, Cornell & Wieman  
1995

Nobelpreis 2001

Grundzustand des Bose - Gases  $E_0 = 0$

$$\langle N_0 \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} - 1} = \frac{\xi}{1 - \xi}$$

Die mittlere Besetzungszahl  
dieses Quantenzustandes  
raum makroskopisch groß  
werden für  $\xi \approx 1$

d.h.  $\langle N_0 \rangle \approx \bar{N}$  (alle Teilchen im Grundzustand)  
kondensiert

allgemein  $\bar{N} = \langle N_0 \rangle + N'$  mit  $N' = \sum_{j>0} \langle N_j \rangle$

(i)  $\eta \ll 1$  (normale Phase) :  $\langle N_0 \rangle$  vernachlässigbar  
 $\rightarrow$  verdünntes Bosegas

(ii)  $\eta \gg 1$  (kondensierte Phase)  $N' \approx \sum_{j>0} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_j} - 1} \ll \bar{N}$

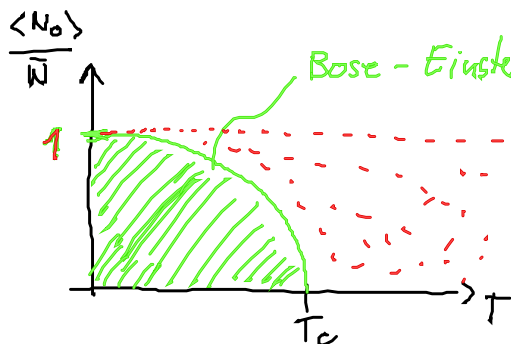
normale Komp  $\frac{N'}{V} \stackrel{\text{kont.}}{\approx} (2s+1) \lambda^{-3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-y}$   
 $\sim T^{3/2}$

$\rightarrow \frac{N'}{\bar{N}} = \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$   $T_c$  definiert durch  $\eta \approx 1$

$$\frac{\langle N_0 \rangle}{\bar{N}} = \begin{cases} 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} & \text{für } T < T_c \\ 0 & T \geq T_c \end{cases}$$



Bruchteil der  
 kondensierten Teilchen

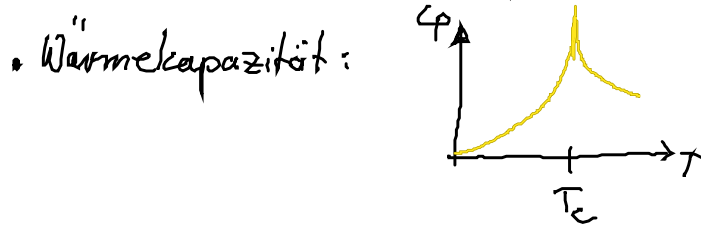


2 Komponenteniges Gas

normale + kondensierte  
 Komponente

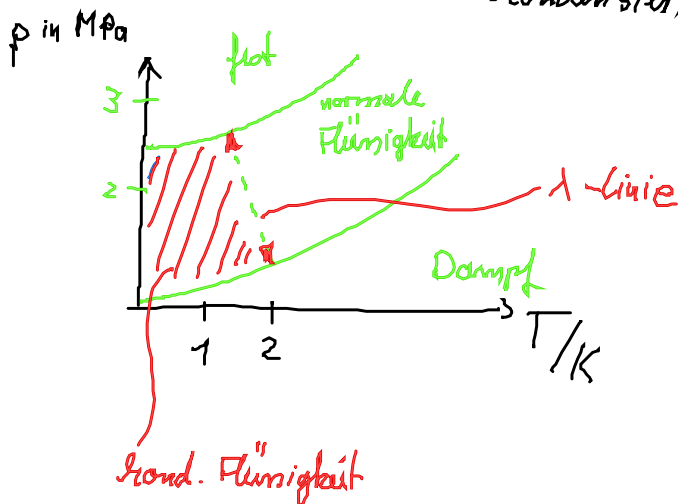
Phasenübergang bei  $T_c$ : normale  $\rightarrow$  kondensierte Phase

- makroskopische Quantenphänomene!



Phasenübergang  
2. Ordnung

- Anwendung: Suprafluide Phase von  $^4\text{He}$  bei tiefen Temperaturen ähnelt 2-komp. Flüs. aus normaler und kondensierter Phase



- stark wechselwirkendes Bosegas

Bose-Einstein-Kondensation mit schwach wechselwirkendem Gas.

Vor. für experimentelle Beobachtung  $\frac{\bar{N}}{V} \lambda^3 > 2.61$

- hohe Phasenraumdichte
- sehr tiefe Temperaturen ( $T < 1 \mu\text{K}$  bei  $\frac{\bar{N}}{V} \sim 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ )

$\rightarrow$  Laserkühlung von Atomen



+ Verdampfungskühlung

Cornell & Wieman : Rb - Atome (1995)  $\sim 10^3$  Atome

Ketterle : Na - Atome (1995)  $\sim 10^5$  Atome

↪ Ende