

2.4 Energieerhaltung

a) Arbeit

b) Kinetische Energie & Kräfte:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{r}^2}{2} \right) = \underline{F} \cdot \underline{\dot{r}} = N} \quad (2.15)$$

Def: $\boxed{\text{Kinetische Energie: } T = \frac{m}{2} \dot{r}^2} \quad (2.16)$

zerlege: $\boxed{\underline{F} = \underbrace{F_{\text{kons}}}_{\text{konservative}} + \underbrace{F_{\text{diss}}}_{\text{dissipative Kraft}}} \quad (2.18)$

c) Konservative Kräfte:

Def: $\boxed{\underline{F}_{\text{kons}} = -\text{grad } U(\underline{r})} \quad (2.20)$

$\nwarrow$ Potential $\swarrow$ Nabla operator

[Erinnerung: $dU = \text{grad } U(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \nabla U(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$
 kartesische Koord: $\text{grad } U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \underline{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \underline{e}_z$
 $\nabla U \perp$ Äquipotentiallinien: $U(\underline{r}) = \text{konst.}$]

Bemerkungen:

(i) verrichtete Arbeit von $\underline{F}_{\text{kons}}$:

$$A_{12}(C) \stackrel{(2.15)}{=} \int_C \underline{F}_{\text{kons}} \cdot d\underline{r} \stackrel{(2.20)}{=} - \int_C \text{grad } U \cdot d\underline{r} = - \int_C dU$$

$$\rightarrow \boxed{A_{12}(C) = -[U(\underline{r}_2) - U(\underline{r}_1)]} \quad (2.21)$$

$\rightarrow$ Arbeit ist unabhängig von Weg in konservativen Kraftfeldern!

$\rightarrow$ geschlossene Wege: $\odot = "C - C_1"$

$$\boxed{A(\odot) = 0} \quad (2.22)$$

(ii) Existenz eines Potentials: (vgl. MMP Kap. 6.6)

$$\boxed{\text{rot } \underline{F} = 0 \stackrel{\text{äquiv.}}{\Longleftrightarrow} \underline{F} = -\text{grad } U(\underline{r})} \quad (2.23)$$

im einfach zusammenhängenden Gebiet!



[Erinnerung: $\text{rot } \underline{F} = \nabla \times \underline{F}$
 kartesische Koord. $(\nabla \times \underline{F})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k$

Beweis: ($\rightarrow$) Setze von Stokes & weitere Überlegung (s. Mathematik)

$$(\leftarrow) [\nabla \times \underline{F}]_i = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} U = 0!$$

d) Energieerhaltung:

Verwende: $\vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\text{grad}U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{d}{dt} U(\vec{r}(t))$ (2.24)

in (2.15) $\xrightarrow{\text{in (2.15)}}$ $\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) \right) = \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}$ (2.25)

$\vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}$

• nur konservative Kräfte ($\vec{F}_{\text{diss}} = 0$):

(2.25): $\frac{d}{dt} \dots = 0 \quad \boxed{\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) = E = \text{konst.}}$ (2.26)

... Energieerhaltungssatz

Def: $\boxed{\begin{array}{l} U(\vec{r}) \dots \text{potentielle Energie} \\ E \dots \text{Gesamtenergie} \end{array}}$ (2.27)

„konservativ“ ... Energie erhaltend

• $\vec{F}_{\text{diss}} \neq 0$:

mechan. Energie ($T+U$)

Umwandlung in Wärmeenergie (Bsp: Reibung) + Dissipation

Bsp:



Austausch mit Umgebung durch (zeitabhängige) Kräfte



Absgabe von $E = T+U$ an Feder!

$\vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ er

• Schlussbemerkung:

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \dots$ Dgl. 2. Ordnung in t

Erhaltungssätze: $E(\vec{r}, \dot{\vec{r}}), p, L \dots$ Dgl. 1. Ordnung in t

→ erste Integrale der Bewegung!

• Anwendung: Trifft Meteor Erde? nur mit $E = \text{konst.}$ lösbar!
 $L = \text{konst.}$

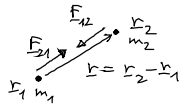
3. Katalog der Kräfte

3.1 Konservative Kräfte

a) Newton'sche Gravitationskraft: zwischen 2 Massepunkten

$$\boxed{\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}} \quad (3.1)$$

$\underbrace{\quad}_{\underline{e}_r}$ (... Zentralkraftfeld)



- Gravitationskonstante: $\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
- Fernwirkungspunkt
- Anwedg: Keplerproblem!

• $U(\underline{r})$? Trick: $\underline{\nabla} U(\underline{r}) = \frac{\partial U}{\partial r} \underline{\nabla} r \stackrel{!}{=} \frac{\partial U}{\partial r} \underline{e}_r$ (3.2)

$$\underline{\nabla} r = \underline{\nabla} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\underline{r}}{r} = \underline{e}_r!$$

$\underline{F}_{12} = -\text{grad} U(\underline{r})!$

$$\Rightarrow \boxed{U(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}} \quad (3.3)$$

... weitreichende Wechselwirkung

$$U(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^n}, \quad n=1$$

• Fern-/Nahwirkungspunkt:

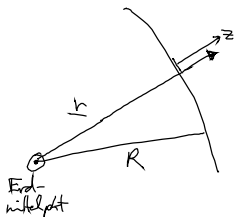
Gravitationspotential, von m_1 erzeugt: $\varphi(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1}{r}$ (3.4)

pot. Energie von m_2 in $\varphi(\underline{r})$: $U(\underline{r}) = m_2 \varphi(\underline{r})$ (3.5)

$\underline{F}_{12} = -m_2 \text{grad} \varphi(\underline{r})$ (3.6)

AKT: m_1 bewegen $\rightarrow$ Gravitationswellen in $\varphi(\underline{r}, t) =$ Welle in der Raumzeit

b) Schwer-/Gewichtskraft:



$|\underline{r}| = r = R + z, \quad z \ll R$

$$\rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R+z} = \frac{1}{R} \frac{1}{1+\frac{z}{R}} \approx \frac{1}{R} - \frac{z}{R^2} \quad (3.7)$$

Näher: $\approx 1 - \frac{z}{R}, \quad \frac{z}{R} \ll 1$

Erde Masse M , Probemasse m

$\rightarrow$ pot. Energie: $\tilde{U}(z) = U(R+z) - U(R) \stackrel{(3.3)}{\stackrel{(3.7)}}{=} \gamma \frac{M}{R^2} m z$
(von m im Grav.feld der Erde)

$\rightarrow \boxed{\tilde{U}(z) = mgz}$, Fallbeschleunigung: $\boxed{g = \gamma \frac{M}{R^2}} \quad (3.8)$
 $\approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Erde

$\rightarrow$ Gewichtskraft: $\boxed{\underline{G} = -\text{grad} \tilde{U} = -mg \underline{e}_z} \quad (3.9)$
von m

- Achtung! Erde ist ausgedehnt
(3.3) (3.4) (3.5) gilt trotzdem $\rightarrow$ Übungen

c) Coulombsches Kraftgesetz:

elektrostat. Potential: $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$ (3.10)

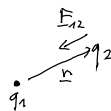
Energie: $U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$ (3.11)

$F_{12} = -\text{grad } U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{r}{r}$ (3.12)

$q_1 q_2 \begin{cases} > 0 \dots \text{abstoßend} \\ < 0 \dots \text{anziehend} \end{cases}$

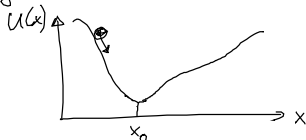
$\epsilon_0 \dots$ Dielektrizitätskonst. des Vakuums

cgs-Einheiten: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow 1$



d) harmonische Kraft:

- allg. 1D-Potential



Ort x_0 :

$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_0} &= U'(x_0) = 0 \dots \text{keine Kraft} \\ U''(x_0) &= k > 0 \dots \text{Minimum, stabile Gleichgewichtslage} \end{aligned} \right\} (3.13)$

- $U(x)$ in Umgebung von x_0 :

Taylorentwicklung: $U(x) = U(x_0) + \underbrace{U'(x_0)}_{=0 \text{ s.o.}} (x-x_0) + \frac{1}{2} \underbrace{U''(x_0)}_{k>0} (x-x_0)^2 + \dots$

„Approximation als Parabel“

$\rightarrow \tilde{U}(y) = U(x) - U(x_0) = \frac{1}{2} k y^2 + O(y^3), \quad y = x - x_0$

$\rightarrow$ harmonisches/Feder-Potential: $\tilde{U}(y) = \frac{1}{2} k y^2$ (3.14)
harmonische/Lineare Kraft: $F = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = -k y$

$\rightarrow$ Viele Potentiale sind lokal harmonisch!

e) Kernkraft: zwischen Nukleonen (Neutronen, Protonen)

Yukawa-Potential: $U(r) = -g^2 \frac{e^{-r/r_0}}{r}$ (3.15)

$e^{-r/r_0} \rightarrow$ endliche Reichweite r_0 der WW
(„abgeschirmtes Coulombpotential“)

$g^2 \dots$ Kopplungskonstante

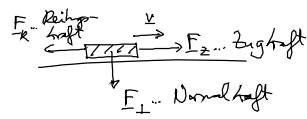
$r_0 = \frac{\hbar}{m_0 c} \dots$ „Compton wellenlänge“ der Austauschteilchen (Pionen)
mit Masse m_0

- Anwendung in kondensierter Materie:
geladene Mikroskop-Teilen in H_2O :



3.2 Reibungs-/dissipative Kräfte [kein U.G.]

a) Haft- und Gleitreibung (Coulombsches Reibungsgesetz)



$$\vec{F}_R = -\vec{F}_z \quad (3.16)$$

Haftreibungskraft

Ruhe falls $|\vec{F}_z| < \mu_H |\vec{F}_{\perp}|$

μ_H ... Haftreibungskoeffizient

Gleitreibung

$$\vec{F}_R = -\mu_G |\vec{F}_{\perp}| \frac{\vec{v}}{v}, \quad 0 < \mu_G < \mu_H$$

μ_G ... Gleitreibungskoeffizient