# 2.4 Energieerhaltung

a) Arbeit

b) kinetische Energie & Kräfte:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\underline{r}}^2}{2}\right) = \underline{F}\cdot\dot{\underline{r}} = N} \qquad (2.15)$$

Def: $\boxed{\text{kinetische Energie: } T = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2}$ (2.16)

Zerlege: $\boxed{\underline{F} = \underbrace{\underline{F}_{kons}}_{\text{konservative}} + \underbrace{\underline{F}_{diss}}_{\text{dissipative}}}$ Kraft (2.18)

c) konservative Kräfte:

Def: $\boxed{\underline{F}_{kons} = -\operatorname{grad} U(\underline{r})}$ (2.20)

Potential

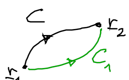
[Erinnerung: $dU = \operatorname{grad} U(\underline{r})\cdot d\underline{r} = \underline{\nabla} U(\underline{r})\cdot d\underline{r}$ Nabla operator

kartesische Koord: $\operatorname{grad} U = \underline{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\underline{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\underline{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\underline{e}_z$

$\underline{\nabla} U \perp$ Äquipotentiallinien: $U(\underline{r}) =$ konst ]

Bemerkungen:

(i) verrichtete Arbeit von $\underline{F}_{kons}$:




$$A_{12}(C) \underset{(2.13)}{=} \int_C \underline{F}_{kons}\cdot d\underline{r} \underset{(2.20)}{=} -\int_C \operatorname{grad} U \cdot d\underline{r} = -\int_C dU$$

$\longrightarrow$ $\boxed{A_{12}(C) = -[U(\underline{r}_2) - U(\underline{r}_1)]}$ (2.21)

$\longrightarrow$ Arbeit ist unabhängig vom Weg in konservativen Kraftfeldern!

$\longrightarrow$ geschlossene Wege: $\oint =$ "$C - C_1$"

$\boxed{A(\oint) = 0}$ (2.22)

(ii) Existenz eines Potentials: (vgl. MMP Kap. 6.6)

$$\boxed{\underbrace{\operatorname{rot}\underline{F} = 0}_{\text{im einfach zusammenhängende Gebiet!}} \underset{\text{dann}}{\overset{\text{genau}}{\Longleftrightarrow}} \underline{F} = -\operatorname{grad} U(\underline{r})} \qquad (2.23)$$

[Erinnerung: $\operatorname{rot}\underline{F} = \underline{\nabla}\times\underline{F}$

kartesische Koord. $(\underline{\nabla}\times\underline{F})_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k$

Beweis: ($\longrightarrow$) Satz von Stokes & weitere Überlegung (s. Mathematik)

($\longleftarrow$) $[\underline{\nabla}\times\underline{F}]_i = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}U = 0$!

d) Energieerhaltung:

Verwende $\underline{F}_{kons} \cdot \dot{\underline{r}} = -\operatorname{grad} U \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = -\frac{d}{dt} U(\underline{r}(t))$ (2.24)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\underline{r}}^2}{2}\right) = \underbrace{\underline{F}}_{\underline{F}_{kons}+\underline{F}_{diss}} \cdot \dot{\underline{r}} \xrightarrow{\text{in (2.15)}} \boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{\underline{r}}^2}{2} + U(\underline{r})\right] = \underline{F}_{diss} \cdot \dot{\underline{r}}} \quad (2.25)$$

- nur konservative Kräfte ($\underline{F}_{diss} = \underline{0}$):

(2.25): $\frac{d}{dt} \ldots = 0$ $\quad \boxed{\frac{m\dot{\underline{r}}^2}{2} + U(\underline{r}) = E = \text{konst.}}$ (2.26)

... Energieerhaltungssatz

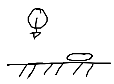
Def: $\boxed{\begin{array}{ll} U(\underline{r}) \ \ldots & \text{potentielle Energie} \\ E \ \ldots & \text{Gesamtenergie} \end{array}}$ (2.27)

„konservativ" ... Energie erhaltend

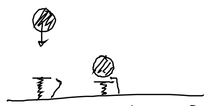
- $\underline{F}_{diss} \neq 0$:

mechan. Energie (T+U) → Umwandlung in Wärmeenergie (Bsp: Reibung) „Dissipation"

Bsp:



mechan. Energie (T+U) → Austausch mit Umgebung durch (zeitabhängige) Kräfte



Abgabe von E=T+U an Feder!

$f(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)\ \underline{e}_r$

- Schlußbemerkung:

$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$ ... Dgl. 2. Ordnung in t

Erhaltungssätze: $E(\underline{r}, \dot{\underline{r}})$, $\underline{p}$, $\underline{L}$ ... Dgl. 1. Ordnung in t

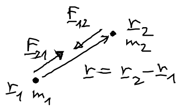
→ erste Integrale der Bewegung!

- Anwendung: Trifft Meteor Erde? nur mit $E = \text{konst.}$, $\underline{L} = \text{konst.}$ lösbar!

# 3. Katalog der Kräfte

## 3.1 Konservative Kräfte

a) Newtonsche Gravitationskraft: zwischen 2 Massepunkten




$$\boxed{\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \underbrace{\frac{\underline{r}}{r}}_{\underline{e}_r}} \qquad (3.1)$$

(... Zentralkraftfeld)

- Gravitationskonstante: $\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$
- Fernwirkungsstandpunkt
- Anwendg: Keplerproblem!

• $U(r)$? Trick: $\underline{\nabla} U(r) = \frac{\partial U}{\partial r} \underline{\nabla} r = \frac{\partial U}{\partial r} \underline{e}_r$ (3.2)

$\underline{\nabla} r = \underline{\nabla}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\underline{r}}{r} = \underline{e}_r$ !

$\underline{F}_{12} = -\text{grad}\, U(r)$ !

$$\Longrightarrow \boxed{U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}} \qquad (3.3)$$

... weitreichende Wechselwirkung

$U(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^n}$, $n=1$

• Fern-/Nahwirkungsstandpkt:

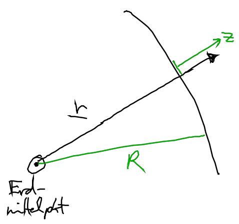
Gravitationspotential, von $m_1$ erzeugt: $\varphi(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1}{r}$ (3.4)

pot. Energie von $m_2$ in $\varphi(\underline{r})$: $U(\underline{r}) = m_2 \varphi(\underline{r})$ (3.5)

$\underline{F}_{12} = -m_2\, \text{grad}\, \varphi(\underline{r})$ (3.6)

ART: $m_1$ bewegen $\longrightarrow$ Gravitationswellen in $\varphi(\underline{r},t)$ = Wellen in der Raumzeit

b) Schwer-/Gewichtskraft:




$|\underline{r}| = r = R + z$, $z \ll R$

$$\longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R+z} = \frac{1}{R} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{z}{R}}}_{\text{Merke: } \approx 1 - \frac{z}{R},\ \frac{z}{R} \ll 1} \approx \frac{1}{R} - \frac{z}{R^2} \qquad (3.7)$$

Erdmasse $M$, Probemasse $m$

$\longrightarrow$ pot. Energie (von m im Grav.feld der Erde): $\tilde{U}(z) = U(R+z) - U(R) \overset{(3.3)}{\underset{(3.7)}{=}} \gamma \frac{M}{R^2} m z$

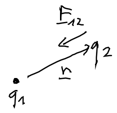
$\longrightarrow \boxed{\tilde{U}(z) = mgz}$, Fallbeschleunigung: $\boxed{g = \gamma \frac{M}{R^2}}$ (3.8) $\underset{\text{Erde}}{\approx} 9,81 \frac{m}{s^2}$

$\longrightarrow$ Gewichtskraft von m: $\boxed{\underline{G} = -\text{grad}\, \tilde{U} = -mg\, \underline{e}_z}$ (3.9)

• Achtung! Erde ist ausgedehnt

(3.3) (3.8) (3.9) gilt trotzdem → Übungen

c) <u>Coulombsches Kraftgesetz:</u>




elektrostat. Potential: $\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$ (3.10)

Energie: $U(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$ (3.11)

$$\underline{F}_{12} = -\text{grad}\, U(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\underline{r}}{r} \qquad (3.12)$$

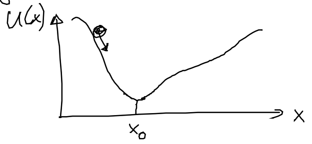
$$q_1 q_2 \begin{cases} > 0 \dots \text{abstoßend} \\ < 0 \dots \text{anziehend} \end{cases}$$

$\varepsilon_0$ ... Dielektrizitätskonst. des Vakuums

cgs-Einheiten: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to 1$

d) <u>harmonische Kraft:</u>

• allg. 1D-Potential




Ort $x_0$:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_0} = U'(x_0) = 0 \dots \text{keine Kraft}$$

$$U''(x_0) = k > 0 \dots \text{Minimum, stabile Gleichgewichtslage} \qquad (3.13)$$

• U(x) in Umgebung von $x_0$:

Taylorentwicklung: $U(x) = U(x_0) + \underbrace{U'(x_0)}_{=0 \text{ s.o.}}(x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\underbrace{U''(x_0)}_{k>0}(x-x_0)^2}_{\text{„Approximation als Parabel"}} + \dots$

$$\longrightarrow \tilde{U}(y) = U(x) - U(x_0) = \frac{1}{2}k y^2 + O(y^3), \quad y = x - x_0$$

→ harmonisches/Feder-Potential: $\boxed{\tilde{U}(y) = \frac{1}{2}k y^2}$

harmonische/Lineare Kraft: $\boxed{F = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = -ky}$ (3.14)

→ **! viele Potentiale sind lokal harmonisch !**

e) <u>Kernkraft:</u> zwischen Nukleonen (Neutronen, Protonen)

<u>Yukawa Potential:</u> $\boxed{U(r) = -g^2 \frac{e^{-r/r_0}}{r}}$ (3.15)

$e^{-r/r_0}$ → endliche Reichweite $r_0$ der Ww („abgeschirmtes Coulombpotential")

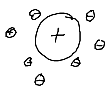
$g^2$ ... Kopplungskonstante

$r_0 = \frac{h}{m_0 c}$ ... „Compton wellenlänge" der Austauschteilchen (Pionen) mit Masse $m_0$

h ← Planckschen Wirkungsquantum

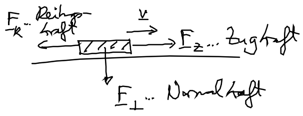
• Anwendung in kondensierter Materie:

geladene Mikrometer-Teilchen in $H_2O$:



## 3.2 Reibungs-/dissipative Kräfte [kein $U(\underline{r})$]

a) Haft- und Gleitreibung (Coulombsches Reibungsgesetz)




$$\underline{F}_R = -\underline{F}_z \quad (3.16)$$

Haftreibungskraft

Ruhe falls $|\underline{F}_z| < \mu_H |\underline{F}_\perp|$

$\mu_H$ ... Haftreibungskoeffizient

Gleitreibung

$$\underline{F}_R = -\mu_G |\underline{F}_\perp| \frac{\underline{v}}{v}, \quad 0 < \mu_G < \mu_H$$

$\mu_G$ ... Gleitreibungskoeffiziet