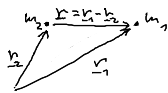


9. Das Zweikörper-Problem



Kräfte $\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}(\underline{r})$
 $\underline{F}_1^{(a)}(\underline{r}_1), \underline{F}_2^{(a)}(\underline{r}_2)$

a) Grundgleichungen:

Newton: $m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_1^{(a)} + \underline{F}_{12}$ (1)
 $m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_2^{(a)} - \underline{F}_{12}$ (2) (9.1)

Rel. und Schwerpunktsbewegung:

$\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$
 $\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{M = m_1 + m_2}$ (9.2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{r}_1 = \underline{R} + \frac{m_2}{M} \underline{r} \\ \underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{m_1}{M} \underline{r} \end{cases}$ (9.3)

(9.1): (1)+(2): $M \ddot{\underline{R}} = \underline{F}_1^{(a)}(\underline{r}_1) + \underline{F}_2^{(a)}(\underline{r}_2)$
 $\frac{M}{m_1} - \frac{M}{m_2}: \ddot{\underline{r}} = \frac{1}{m_1} \underline{F}_1^{(a)} - \frac{1}{m_2} \underline{F}_2^{(a)} + \frac{1}{\mu} \underline{F}_{12}(\underline{r})$ (9.4)

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$
 $\Leftrightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
 ... reduzierte Masse (9.5)

"Entkoppeln" der Beweg.gl. (9.4):

$\xrightarrow{!} \frac{\underline{F}_1^{(a)}}{m_1} = \frac{\underline{F}_2^{(a)}}{m_2}$ (9.6) Bsp.: $\underline{F}_i^{(a)} = -\nabla_i \mathcal{U}^{(a)}(\underline{r}_i)$ mit $|\underline{r}| \ll \frac{\mathcal{U}^{(a)}(\underline{r}_i)}{|\nabla_i \mathcal{U}^{(a)}(\underline{r}_i)|}$
 Gravitation: z.B. Erdoberfläche
 Zentralkraft erzeugt $\mathcal{U}^{(a)}$
 Längenskalen, auf der $\mathcal{U}^{(a)}$ variiert

$\underline{F}_1^{(a)} = m_1 \underline{g}$
 $\underline{F}_2^{(a)} = m_2 \underline{g}$ (9.7)

(9.4) $\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\underline{R}} = \underline{g} \\ \mu \ddot{\underline{r}} = \underline{F}_{12}(\underline{r}) \end{cases}$ (9.8)

Gesamtimpuls $\underline{P} = M \dot{\underline{R}}$ (9.9)
 "Relativ -" $\underline{P}^* = \mu \dot{\underline{r}}$ (9.10)

Gesamt Drehimpuls: $\underline{L} = \underline{r}_1 \times \underline{p}_1 + \underline{r}_2 \times \underline{p}_2$
 $\rightarrow \underline{L} = \underline{L}_M + \underline{L}_\mu = \underline{R} \times \underline{P} + \underline{r} \times \underline{P}^*$ (9.11)

kinet. Energie: $T = \frac{m_1}{2} \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\underline{r}}_2^2$

$T = \frac{M}{2} \dot{\underline{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\underline{r}}^2 = \frac{P^2}{2M} + \frac{P^{*2}}{2\mu}$ (9.12)

- b) Keplerproblem: $\rightarrow$ keap. 6
 c) Schwerpunkt-Bezugssystem (SPS oder Center of Mass System)

• Def: $\underline{R}^* = 0$, Ursprung des SPS im Schwerpunkt. (9.13)

- Größen im SPS: bezeichne mit $*$
- SPS ist Nicht-IS, falls $\underline{E}_1^{(a)} + \underline{E}_2^{(a)} \neq 0$
- Ortsvektoren: (9.3) $\xrightarrow{\underline{R}^*=0}$

$$\begin{aligned} \underline{r}_1^* &= \frac{m_2}{M} \underline{r} \\ \underline{r}_2^* &= -\frac{m_1}{M} \underline{r} \end{aligned} \quad (9.14)$$

• Teilchenimpulse: $M \underline{\dot{R}}^* = 0 = \underline{p}_1^* + \underline{p}_2^*$

$$\Leftrightarrow \underline{p}_1^* = -\underline{p}_2^* = -\underline{p}_2^* \stackrel{(9.14)}{=} \mu \underline{\dot{r}} = \underline{p}^* \quad (9.15)$$

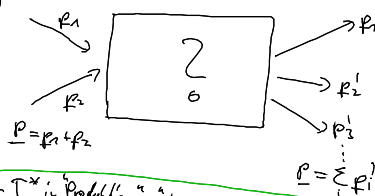
• kinet. Energie im SPS: $T^* = \frac{\underline{p}_1^{*2}}{2m_1} + \frac{\underline{p}_2^{*2}}{2m_2} = \frac{\underline{p}^{*2}}{2\mu}$ (9.16)

• kinet. Energie im Laborsystem (LS):
 (9.12) & (9.16)

$$T = \frac{\underline{P}^2}{2M} + T^* \quad (9.17)$$

$\underbrace{\quad}_{= \text{konst. f\"ur } \underline{E}_1^{(a)} + \underline{E}_2^{(a)} = 0, \text{ da } \underline{P} = \text{konst.}}$

• Stoßproz.:



hier T^* in Produktion, "Anregung" von Teilchen verwendbar

effektiver Stoßprozess $\rightarrow \underline{P} = 0 \rightarrow T^*$ maximal: $LS \equiv SPS$

• Bsp (1): $m_1 \xrightarrow{p_1} m_2, p_2 = 0 \xrightarrow{\text{o.B.}} T^* = \frac{\underline{p}^{*2}}{2\mu} = \frac{m_2}{M} T_1$
 $m_1 = m_2 \rightarrow T^* = T_1/2 !$

(2): Teilchenbeschleuniger

Idee: Stoß von Elementarteilchen $\xrightarrow{\text{Zerstoßung } E=mc^2}$ "Teilchenzoo"

(i) $\begin{matrix} \text{Proton} & \xrightarrow{p} & \text{Proton} \\ & & \text{"Target"} \end{matrix}$ Gesamtenergie:
 $T_1 + 2m_0c^2 \approx 7 \text{ TeV} \gg 2m_0c^2$
 $\approx 2 \text{ GeV} \dots \text{hochrelativistisch}$

$\xrightarrow{\text{o.B.}} T^* = \sqrt{2m_0c^2 T_1} \approx 120 \text{ GeV} \ll 7 \text{ TeV}$
 Rest um $\frac{P}{2M}$ zu erhalten

(ii) besser: Lange Hadron Collider (CERN, Ctraf)

$LS \equiv SPS$:

$$\begin{matrix} \xrightarrow{P} & \xleftarrow{P} \\ 7 \text{ TeV} & 7 \text{ TeV} \end{matrix} \Rightarrow T^* = 14 \text{ TeV}$$

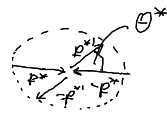
d) Elastischer Zweiteilchenstoß

$\hookrightarrow$ keine innere Anregung der Teilchen

a) LS: Impulse von dem Stoß: $\underline{p}_1, \underline{p}_2$

nach p_1, p_2 :

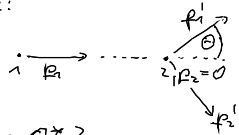
$$F_i^{(a)} = 0 \xrightarrow{(5.19)} \left\{ \begin{array}{l} p_1 + p_2 = p_1' + p_2' = p \\ T_1 + T_2 = T_1' + T_2' \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Impulserh.} \\ \text{Energieerh.} \end{array}$$

$\beta)$ SPS: vor dem Stoß: $p_1^* = -p_2^* = p^*$
nach $p_1' = -p_2' = p^{*1}$ } (5.20) 

$\gamma)$ LS $\Leftrightarrow$ SPS:

(9.2) & (9.14) $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{r}_1 = \dot{R} + \dot{r}_1^* \\ \dot{r}_2 = \dot{R} + \dot{r}_2^* \end{array} \right\} \xrightarrow[\cdot m_i]{\cdot m_i} \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{m_1}{M} p + p^* \quad (5.21) \\ p_2 = \frac{m_2}{M} p - p^* \quad (5.22) \end{array} \right.$
sieht vor/nach Stoß

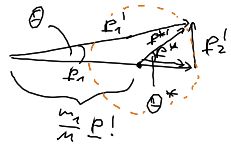
typisches Exp:



θ ... Streuwinkel im LS

Frage: $\theta \leftrightarrow \theta^*$? $\rightarrow$ Übung

Vektordiagramm
 $m_1 < m_2$



oder

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*}$$

$\rightarrow$ im SPS: θ^* beliebig

im LS: θ begrenzt, je extremer $m_1 < m_2$

$\rightarrow$ schlechte Winkelauflösung im LS $\rightarrow$ SPS