

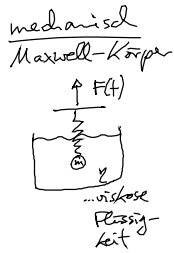
5. Eindimensionaler harmonischer Oszillator

• volles Problem:

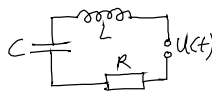
$$m \ddot{x} = F_{\text{ges}}(x, \dot{x}, t) \quad (5.1)$$

mit $F_{\text{ges}}(x, \dot{x}, t) = \underbrace{-f x}_{\text{harm./ Federkraft}} - \underbrace{\alpha \dot{x}}_{\text{Stokes- Reibung}} + \underbrace{F(t)}_{\text{einge- präge Kraft}}$

• Realisierung:



elektromagnetisch
Schwingkreis



$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = U(t), \quad \dot{Q}(t) = I(t)$$

„Masse“ „Reibung“ „Feder“

- harm. Oszillator:
 - fundamentale Bedeutung der Physik
 - eines der wenigen exakt lösbaren Probleme
- dient zur Veranschaulichung von fundamentalen Konzepten
- mathem. Details: [MMP, Kap. 8]
 - (5.1) lineare Dgl. 2. Ordnung in Zeit für $x(t)$ mit Inhomogenität $F(t)$
 - ↳ Superpositionsprinzip
 - ↳ 2 Integrat. konst.
 - ↳ $x_{\text{part}}(t)$

$$\text{allg. Lsg.: } x(t) = \underbrace{a x_1(t) + b x_2(t)}_{\substack{x_{\text{hom}}(t) \\ \text{Lsg. von homog. Dgl.}}} + \underbrace{x_{\text{part}}(t)}_{\substack{\text{eine partikuläre} \\ \text{Lsg.}}} \quad (5.2)$$

5.1 ~~Ungeordnete~~ freie Bewegung

a) Lösung: $m \ddot{x} + f x = 0 \quad (5.3)$

• Lsg.: $x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m} \dots \text{Eigenfrequenz} \quad (5.4)$

$$A^2 = a^2 + b^2 \left\{ \begin{array}{l} a = A \cos \varphi \\ b = A \sin \varphi \end{array} \right. = A \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad \left. \begin{array}{l} A \dots \text{Amplitude} \\ \varphi \dots \text{Phase} \end{array} \right\} \text{ der Schwingung}$$

NB: $\cos(\omega_0 t - \varphi) = \cos \omega_0 t \cos \varphi + \sin \omega_0 t \sin \varphi$

b) Komplexe Darstellung: $z = x + iy$ (S.5)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ i | \ddot{y} + \omega_0^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Linearität}} \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (\text{S.6})$$

• syst. Lsg. durch Ansatz: $z(t) = e^{\lambda t}$ in (S.6)

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \xrightarrow{\text{Faktor } e^{\lambda t}} \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \xrightarrow{\text{Faktor } i} \begin{cases} \lambda^2 = -\omega_0^2 \\ \lambda = \pm i\omega_0 \end{cases} \dots \text{„Quadr. Polynom“} \quad (\text{S.7})$$

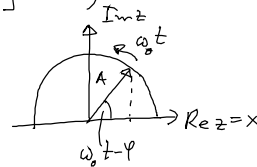
$$\rightarrow z(t) = \bar{a} e^{i\omega_0 t} + \bar{b} e^{-i\omega_0 t}, \quad \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$$

NB: $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ Eulersche Relation

$$x(t) = \text{Re } z(t) = \text{Re} [A e^{i(\omega_0 t - \varphi)}] \quad (\text{S.8})$$

o.B.d.A.
(i) $\bar{a} = A e^{-i\varphi}$
 $\bar{b} = 0$

$$= A \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

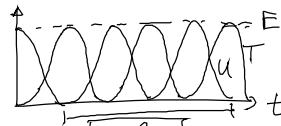


(ii) i.a.: bestimme $\bar{a}, \bar{b}$ so, daß Anfangsbed. erfüllt

c) Energiebilanz: $(\varphi=0 \rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t)$

• $E = T + U$ mit $U = \frac{f}{2} x^2 \rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = -fx$, $f = m\omega_0^2$ (S.4)

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ U &= \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} E = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \quad (\text{S.9})$$



$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \dots \text{Periodendauer} \quad (\text{S.10})$$

• Mittelwerte: $\langle T \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt T(t) = E \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega_0 t) d(\omega_0 t) \stackrel{\text{Trick}}{=} \frac{E}{2}$ (S.11)

$$\langle U \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt U(t) = \frac{E}{2}$$

.... Gleichverteilung im Mittel!

[NB: Trick: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = \frac{1}{2}$]

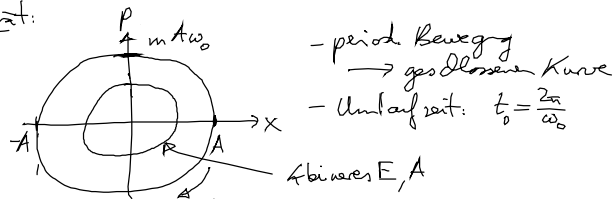
d) Bewegung im Phasenraum: $x-p$ -Ebene

• p konjugierte Koord. zu x [s. analyt. Mechanik]

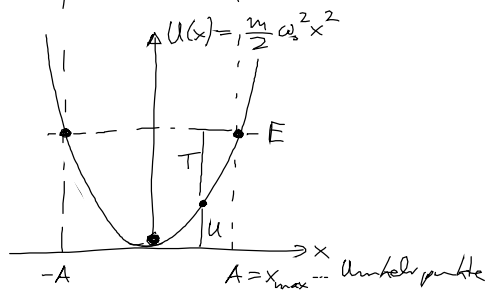
$$\hookrightarrow [px] = [Et] =]s \dots \text{Wirkung}$$

• hier: $\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t) \\ p(t) = m\dot{x}(t) &= -m A \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Parametrisierung} \\ \text{einer Ellipse} \end{array}$

• Phasenporträt:



• vgl.



• Anharmonischer Oszillator: qualitatives Phasenporträt $\rightarrow$ Übung

• Wirkung einer Bewegung:

$$S := \oint p(x) dx = \int_0^{t_0} p \dot{x} dt \quad (S.12)$$

ein Umlauf
eingeschlossene Fläche im Phasenraum