14.2 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

- $$\boxed{H(\{q_j\},\{p_j\},t) = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot q_j - L(\{q_j\},\{\dot q_j\},t)} \quad (13.30)$$

  ... Hamilton-Fkt.

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \dot q_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot p_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned}} \quad (14.4)$$

... Hamiltonsche (kanonische) Bew.gln.

$$\& \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}} \quad (14.5)$$

- Energieerhaltung:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\longrightarrow \quad H = T + U$$

Gesamtenergie für $\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$

- zyklische Koord.

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \longrightarrow p_j = \alpha = \text{konst.}} \quad (14.7)$$

14.3 Methode der Poisson-Klammer

- Observable / Meßgröße:

$$\boxed{A = A(\underbrace{\{q_j\},\{p_j\}}_{\text{bestimmen Zustand des Systems eindeutig!}},t)} \quad (14.12)$$

(i) Observable = „QM-Slang"

(ii) Bsp: H, q_j, p_j Schwerpkt./-impuls

a) Zeitentwicklung von A: klar, wenn $\frac{dA}{dt}$ bekannt

$$\frac{dA}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \underbrace{\dot q_j}_{= \frac{\partial H}{\partial p_j}} + \frac{\partial A}{\partial p_j} \underbrace{\dot p_j}_{= -\frac{\partial H}{\partial q_j}} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}} \quad (14.13)$$

$$\text{mit} \quad \boxed{\{A, H\} = \sum_j \frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}} \quad (14.14)$$

... Poissonklammer von A und H

Spezialfälle:

$$A = q_k \xrightarrow{(14.13)(14.14)} \frac{\partial q_k}{\partial q_j} = \delta_{kj}, \ \frac{\partial q_k}{\partial p_j} = 0 \qquad \dot{q}_k = \{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$A = p_k \xrightarrow{(14.13)(14)} \frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \delta_{kj}, \ \frac{\partial p_k}{\partial q_j} = 0 \qquad \dot{p}_k = \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

(14.4) Hamiltonsche Bew.gl.

b) Formale Eigenschaften: Rechnen!

$$\boxed{\{A, B\} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right)} \quad (14.15)$$

... Poisson Klammer

(i) Antisymmetrie:

$$\boxed{\{A, B\} = - \{B, A\}} \quad (14.16) \quad \text{... nicht kommutativ}$$

$$\rightarrow \boxed{\{A, A\} = 0} \quad (14.17)$$

(ii) Linearität:

$$\boxed{\{c_1 A_1 + c_2 A_2, B\} = c_1 \{A_1, B\} + c_2 \{A_2, B\}} \quad (14.18)$$

(iii) „Nullelement":

$$\boxed{\{c, A\} = 0} \quad (14.19)$$

Konstante

(iv) Produktregel:

$$\boxed{\{A, BC\} = \{A, B\} C + B \{A, C\}} \quad (14.20)$$

NB: Beachte Stellung von C bzw B in QM!

(v) Jacobi-Identität:

$$\boxed{\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0} \quad (14.21)$$

zyklisch durchtauschen

Beweise: (i)–(iv) durch Einsetzen

(v) nicht einfach

c) Beispiele/Rechnen!

(i) $$\{q_k, p_l\} = \sum_j \Big(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_j}}_{\delta_{lj}} - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial q_j}}_{=0} \Big)$$

$$\longrightarrow \boxed{\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}} \quad (14.22)$$

(ii) $$\boxed{\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}} \quad (14.23)$$

d) $\{\ldots\}$ ist unabhängig von kanonische Variablen!

- kanonische Transformation: $Q_k = Q_k(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$
  $P_k = P_k(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$

- Observable: $A(\{q_j\}, \{p_j\}, t) = \bar{A}(\{Q_j\}, \{P_j\}, t)$
  $B(\quad " \quad) = \bar{B}(\quad " \quad)$

$$\xrightarrow[\text{[s. Nolting]}]{\text{o.B.}} \boxed{\{A,B\}_{q,p} = \{\bar{A}, \bar{B}\}_{Q,P} = \{A,B\}} \quad (14.24)$$

$\Longrightarrow$ $\{\ldots\}$ erlauben Aussagen unabh. von Wahl der kanonische Variablen

e) Integrale / Konstanten der Bewegung

(i) $\boxed{\{A,H\} = -\frac{\partial A}{\partial t} \xrightarrow{} \frac{dA}{dt} = 0 \rightarrow A = \text{konst.}}$ (14.25)

Bsp: Kap. 14.4

(14.13) $\frac{dA}{dt} = \{A,H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$

(ii) speziell: $\boxed{\{A,H\} = 0 \;\&\; \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \rightarrow A = \text{konst.}}$ (14.26)

Bsp: Gesamtenergie $E = H$!

(iii) erzeuge neue Konstante der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} \{H,A\} &= \frac{\partial A}{\partial t} \\ \{H,B\} &= \frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{Identität (14.21) für } A,B,H]{\text{Jacobi}} \boxed{\{H, \{A,B\}\} = \frac{\partial}{\partial t}\{A,B\}}$$

$\underbrace{\phantom{\{H,A\}=\{H,B\}}}_{\substack{A = \text{konst.} \\ B = \text{konst.}}}$

$\xrightarrow{(14.25)} \{A,B\} = \text{konst.}$ (14.27)

.... Poissonscher Satz!

f) Quantenmechanik

$$\{A,B\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{B}] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}] \quad (14.28)$$

(i) $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h ... Plancksche Konstante

(ii) $[\ldots,\ldots]$ ... Kommutator mit Eigenschaften 14.3b) (i)–(v)

(iii) $\hat{A},\hat{B}$ ... Operatoren = Observablen (z.B. Matrizen, Differentialoperatoren)

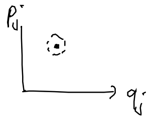
(iv) Fundamental klammern

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$
$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] \quad (14.29)$$

14.4. Liouvillesche Satz

- Ausblick in die statistische Mechanik
- Zustand eines Systems eindeutig bestimmt durch

$$\boxed{\underline{X}(t) = \{q_j(t), p_j(t)\} = \text{Punkt im Phasenraum}}$$



Problem: $N \stackrel{\text{z.B.}}{=} 1\,\text{Mol} = 6\cdot 10^{23} \longrightarrow$ nur unvollständige Info über System möglich

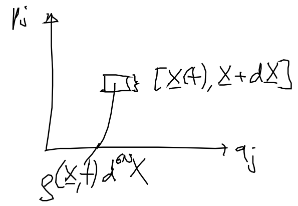
$\longrightarrow$ statistische Mechanik:
trifft Aussagen über Wahrscheinlichkeiten
& mittlere Größen

- Def: Dichte $\rho(\underline{X},t)$ im Phasenraum:

$\underbrace{\rho(\underline{X},t)\, d^{6N}X}_{\text{6N dim Vol.element}}$ ... Wahrscheinlichkeit, System im Zustand aus $[\underline{X}(t), \underline{X}+d\underline{X}]$ anzutreffen

$d^{6N}X = dq_1 \cdots dq_{3N}\, dp_1 \cdots dp_{3N}$

$\int_V \rho(\underline{X},t)\, d^{6N}X = 1$ ... „System ist irgendwo in V" = Normierung (14.31)



- Observable: $A = A(\{q_j\}, \{p_j\}, t) = A(\underline{X},t)$

Mittelwert = Erwartungswert

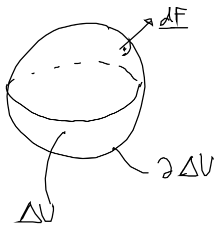
$$\langle A \rangle = \int \underbrace{d^{6N}X\, \rho(\underline{X},t)}_{\text{Wahrscheinlichkeit mit der } A(\underline{X},t) \text{ realisiert wird}} A(\underline{X},t) \qquad (14.32)$$

[Bsp: Würfel: $1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \ldots 6\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$]

- Kontinuitätsgleichung: Herleitung

Ausgangspunkt: $\int_{\Delta V} \rho(\underline{X},t)\, d^{6N}X$ ... Wahrscheinlichkeit in System in ΔV anzutreffen

ΔV: Teilvolumen des gesamten Phasenraumes



zeitl. Änderung:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Delta V} \rho(\underline{X},t)\, d^{6N}X \underset{\substack{\Delta V\\ \text{fest}}}{=} \int \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{X},t)\, d^{6N}X$$

$$\underset{\substack{\text{System wird}\\ \text{nicht „erzeugt"}\\ \text{oder „vernichtet"}}}{=} -\int_{\partial\Delta V} \underbrace{\underline{j}(\underline{X},t)\cdot d\underline{F}}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit (pro Zeiteinheit),}\\ \text{daß System } \Delta V \text{ über } \partial\Delta V \text{ verläßt}}} \qquad (14.33)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Wahrscheinlichkeitsstromdichte:}\\ \underline{j}(\underline{X},t) = \rho(\underline{X},t)\,\dot{\underline{X}}(t)\end{array}} \qquad (14.34)$$