

10. Der starre Körper

Def.:

Ein System von abzählbaren, sehr vielen Massepunkten m_ν , deren Abstände $|r_\nu - r_\mu| = |r_\nu - r_\mu|$ (10.1) für alle ν, μ konstant sind

→ starr $\equiv$ keine Deformation möglich

- Bsp: Festkörper, ändern sich wenig unter Druck, Temp. Änderung etc.
- starrer Körper: idealisiertes Objekt der klass. Mechanik

Bsp: instantane Kraftausbreitung

$F \neq 0, t \geq 0$ → starrer Körper → $a \neq 0, t \geq 0$

RT: Lichtgeschw. $c \equiv$ max. Geschw.

$F \neq 0, t \geq 0$ → deformierbarer Körper → $a \neq 0, t \geq \epsilon$

- Zahl der Freiheitsgrade: $f = 3N - Z$
 $\uparrow$
 Zwangsbed.
 $|r_\nu - r_\mu| = \text{konst.}$

N	Z	f
1	0 •	3
2	1 —	5
3	3 Δ	6
4	6	6
5	9	6
⋮		

$\left. \begin{array}{l} \text{je 1 neue Massepkt.} \\ \text{ist durch 3 Abstände von} \\ \text{den anderen Massepkt.} \\ \text{festgelegt} \end{array} \right\}$

→ Der starre Körper hat 6 Freiheitsgrade: 3 für Translation (Lage im Raum)
 (10.2) 3 für Rotation (Orientierung im Raum)

• weitere Einschränkung:

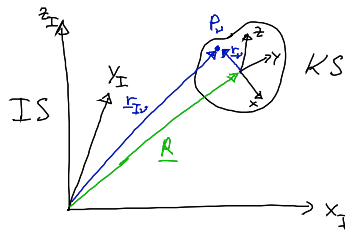
a) Rotation um orts festen Pkt. → $f = 3$

Bsp: Kreisel in Kardanschler Aufhängung
 → Schiffskörper

b) Rotation um orts feste Achse → $f = 1$

10.1 Kinematik

a) Koord. system



1. arts festes Koord. system IS: $\{x_I, y_I, z_I\} = \{x_{I1}, x_{I2}, x_{I3}\}, \{e_{I1}, e_{I2}, e_{I3}\}$

2. Körperfestes " KS: $\{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}, \{e_1, e_2, e_3\}$

KS i.a. kein IS

• $\underline{R}$... „Aufpht“ Bsp: Schwerpunkt, Auflagepht, Symmetriezentrum, ...

• Pkt. $P_v \in$ starrer Körper: $\underline{r}_{Iv} = \underline{R} + \underline{r}_v$ (10.3)

b) Euler'scher Satz:

Jede Bewegung des starren Körpers läßt sich in jedem Zeitpht. zerlegen in eine Translation des Aufphtes $\underline{R}(t)$ und eine Rotation um eine momentane Drehachse $\underline{\omega}(t)$ durch den Aufpht.:

$$\dot{\underline{r}}_{Iv} = \dot{\underline{R}}(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_v(t) \quad \forall P_v \quad (10.4)$$

Beweis: (i) $\frac{d}{dt} \underline{r}_{Iv} \stackrel{(10.3)}{=} \dot{\underline{R}} + \dot{\underline{r}}_v(t) \quad (*)$

Alt. Aufg. starrer Körper: $|\underline{r}_v| = \text{konst.} \quad \forall t \rightarrow d\underline{r}_v \perp \underline{r}_v$

$$\underline{r}_v \rightarrow d\underline{r}_v \xrightarrow{(7.5)} d\underline{r}_v = d\varphi \underline{e}_\omega \times \underline{r}_v$$

$$\text{mit } \underline{\omega}_v = \frac{d\varphi}{dt} \underline{e}_\omega \text{ d. } \frac{d}{dt}: \dot{\underline{r}}_{Iv} = \dot{\underline{R}}(t) + \underline{\omega}_v \times \underline{r}_v$$

$$(ii) \quad \underline{\omega} = \underline{\omega}_v = \underline{\omega}_\mu? \quad \dot{\underline{r}}_{I\mu} = \dot{\underline{R}}(t) + \underline{\omega}_\mu \times \underline{r}_\mu$$

$$\text{Rel. geschw.: } \dot{\underline{r}}_{Iv} - \dot{\underline{r}}_{I\mu} \stackrel{(10.3)}{=} \dot{\underline{r}}_v - \dot{\underline{r}}_\mu \\ = \underline{\omega}_v \times \underline{r}_v - \underline{\omega}_\mu \times \underline{r}_\mu \perp \underline{r}_v - \underline{r}_\mu \quad \forall v, \mu$$

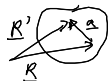
$$\text{nur mit } \underline{\omega}_v = \underline{\omega}_\mu = \underline{\omega}$$

$$\rightarrow \dot{\underline{r}}_v - \dot{\underline{r}}_\mu = \underline{\omega} \times (\underline{r}_v - \underline{r}_\mu) \quad \text{gel.}$$

• Satz: $\underline{\omega}$ ist unabh. von Wahl von $\underline{R}$ (10.5)

Beweis

$$\text{Aufphte: } \underline{R}, \underline{R}' = \underline{R} + \underline{a} \rightarrow \underline{r}_{Iv} = \underline{R} + \underline{r}_v = \underline{R}' + \underbrace{\underline{r}_v - \underline{a}}_{\underline{r}'_v}$$



$$(10.6): \quad \dot{\underline{r}}_{Iv} = \dot{\underline{R}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_v = \dot{\underline{R}}' + \underline{\omega}' \times \underline{r}'_v \\ = \dot{\underline{R}} + \underbrace{\dot{\underline{a}}}_{=0} + \underline{\omega}' \times (\underline{r}_v - \underline{a})$$

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{= \omega \times r} \underline{\omega} \times (r_v - a) = \underline{\omega}' \times (r_v - a) \\
 & \rightarrow (\underline{\omega} - \underline{\omega}') \times (r_v - a) = 0 \quad \forall v \\
 & \rightarrow \underline{\omega} = \underline{\omega}' \text{ gef.}
 \end{aligned}$$

a) Eulersche Winkel:

• Lage des starren Körpers:

(i) $R \rightarrow 3$ Koord.

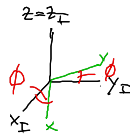
(ii) Orientierung von KS relativ zu IS

$\rightarrow 3$ Eulersche Winkel

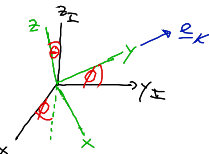
$\rightarrow f=6!$

• Starte mit IS = KS:

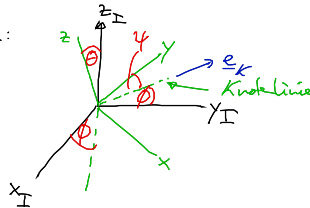
ϕ : Rot. um $z_I = z$ -Achse:



θ : Rot. um momentane y -Achse:



ψ : Rot. um z -Achse:



• von $\underline{\omega}$ zu ϕ, θ, ψ : [vgl. von $v = \frac{dr}{dt} \rightarrow r$

2 Möglichkeiten:

$$\underline{\omega} = \begin{cases} \omega_{Ii} \underline{e}_{Ii} \dots \text{raumfest} \\ \omega_i \underline{e}_i \dots \text{körperfest} \end{cases}$$

Rechnungen bevorzugt körperfest

$\rightarrow$ Folie

10.2. Dynamik des starren Körpers (I) & Trägheitstensor

a) Dynam. Gldg.

• starrer Körper = Spezialfall eines Vielteilchen Systems

• innere Kräfte:

$$F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu} \rightarrow \underline{F}^{(i)} = \sum_{\nu\mu} F_{\nu\mu} = 0 \text{ (8.6), „Münchhausen“}$$

$$\underline{F}_{v\mu} \parallel \underline{r}_{Iv} - \underline{r}_{I\mu} \rightarrow \underline{D}^{(i)} = \sum_{v\mu} \underline{r}_{Iv} \times \underline{F}_{v\mu} = 0 \quad (8.7)$$

... „keine spontane Rotation“

starrer Körper: (i) $\underline{F}^{(i)} = 0 = \underline{D}^{(i)}$!

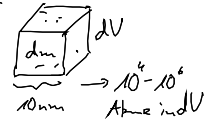
(ii) innere Kräfte $\rightarrow$ Starrheit

• Kontinuumslineas:

diskrete Massenpunkte $m_v \rightarrow$ kont. Masseverteilung:

$$dm = g(\underline{r}) d^3r$$

$$\text{Massendichte: } g(\underline{r}) = \frac{dm}{dV = d^3r}$$



$$\sum_v m_v \dots \rightarrow \int d^3r g(\underline{r}) \dots$$

Bsp: (1) Gesamtmasse: $M = \sum_v m_v \rightarrow \int d^3r g(\underline{r}) \quad (10.10)$

(2) " Impuls: $\underline{P} = \sum_v m_v \underline{\dot{r}}_{Iv} \rightarrow \int d^3r g(\underline{r}_{Iv}) \underline{v}(\underline{r}_{Iv}) \quad (10.11)$

(3) " Drehimpuls: $\underline{L}_I = \sum_v m_v \underline{r}_{Iv} \times \underline{\dot{r}}_{Iv} \rightarrow \int d^3r g(\underline{r}_{Iv}) \underline{r}_{Iv} \times \underline{v}(\underline{r}_{Iv}) \quad (10.12)$

im folgenden!!