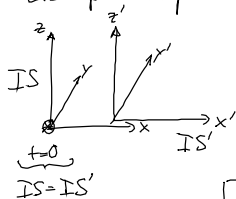


16.3 Der Minkowski-Raum

- Lichtpuls: sphärische Ausbreitung in IS & IS'



$$\xrightarrow{t=0, IS=IS'} \boxed{-c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (16.9)$$

... Norm im Minkowski-Raum
ist Lorentz-Skalar

- Minkowski-Raum: = 4D Raumzeit

(kontravariant)

Vierervektor: $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (16.10)$ Komp: $x^\alpha, \alpha=0,1,2,3$

- Minkowski-Norm:

$$\Delta s^2 = x^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (16.11)$$

mit g_{ij} Elemente von $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$... metrischer Tensor (16.12)

- kovarianter Vierervektor:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \text{Komp: } x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \quad (16.13)$$

- Minkowski-Norm:

$$\Delta s^2 = x^\alpha x_\alpha \quad (16.14)$$

↑
(16.11) mit (16.13)

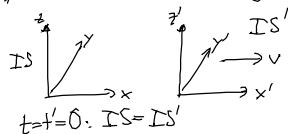
16.4 Die Lorentz-Trafo

- Trafo von IS $\rightarrow$ IS'

• Def:

Die Minkowski-Norm (16.9) ist invariant unter Lorentztrafo

- „boost“ in x-Richtung: also $y=y', z=z'$



allg. lineare Trafo:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (16.15)$$

⋮ s. Folie

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma (x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma (ct - \beta x) \\ \beta &= \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}} \quad (16.16)$$

Lorentz-Trafo
für boost in
x-Richtung

NB. (1) $\beta = \frac{v}{c} \ll 1 \rightarrow \beta \approx 0, \gamma \approx 1$

$$\begin{array}{l} \text{(16.16)} \\ \beta = v \end{array} \left. \begin{array}{l} x' = x - vt \\ t' = t \end{array} \right\} \text{Galilei-Trafo } \checkmark$$

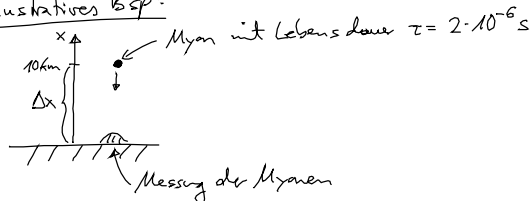
(2) synchronisierte Uhren in IS: $\odot \odot \odot \odot \rightarrow x$

$$\rightarrow c t' = -\gamma \beta x$$

$\uparrow$
 $ct=0$

... nicht synchronisiert in IS'!
Gleichzeitigkeit ist relativ!

• illustratives Bsp:



(1) ohne SRT: $v_\mu \approx c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\rightarrow s = v_\mu \tau = 600 \text{ m} \ll 10 \text{ km} \quad \checkmark$$

(2) mit SRT: IS = Erde

IS' = Myon bei $x' = 0$, „innere Uhr“: $\tau = \Delta t'$

a) in IS: Flugzeit Δt ?

$$\text{(16.16)} \rightarrow c \Delta t' = \gamma (c \Delta t - \beta \Delta x) \quad (1)$$

$$\Delta x' = 0 = \gamma (\Delta x - \beta c \Delta t) \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow \Delta x = \beta c \Delta t$$

$$\text{in (1)} \rightarrow c \Delta t' = \gamma c \Delta t \underbrace{(1 - \beta^2)}_{\gamma^{-2}}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t < \Delta t} \quad (16.17)$$

... Zeitdilatation = bewegte Uhren gehen langsamer

Bsp: $v = \frac{999}{1000} c \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{5}{100} \rightarrow \Delta t = \frac{100}{5} \tau = 4 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

$\uparrow$
 $2 \cdot 10^{-6}$

$$\rightarrow \Delta x \approx c \Delta t = 12 \text{ km } \checkmark$$

b) in IS': Flugweg $\Delta x'$? Messe Δx in IS' für $\Delta t' = 0$!

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - \beta c \Delta t) \quad (3)$$

$$0 = \gamma (c \Delta t - \beta \Delta x) \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow c \Delta t = \beta \Delta x \text{ in (3)}$$

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \underbrace{(1 - \beta^2)}_{\frac{1}{\gamma^2}}$$

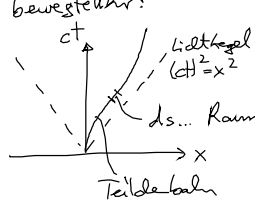
$$\rightarrow \boxed{\Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x < \Delta x} \quad (16.18)$$

... Lorentz Kontraktion =
bewegte Maßstäbe sind
kürzer

17. Relativistische Mechanik

17.1 Eigenzeit

bewegte Uhr:



Lightkegel
(ct)² = x²
ds... Raumzeit-Intervall

$$(16.17) \quad c dt = c dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

$$= [c^2 dt^2 - v^2 dt^2]^{1/2} = [c^2 dt^2 - dx^2]^{1/2}$$

-ds²... Lorentzskalar

$$\rightarrow \boxed{\tau = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int \gamma^{-1} dt} \quad (16.19)$$

... Eigenzeit = Lorentzskalar

17.2 Impulsatz

- Regeln: (i) verknüpfte Vierervektoren
(ii) $\frac{v}{c} \ll 1 \rightarrow$ Newtonsche Mechanik

Differenzvektor: $dx^\alpha, \begin{pmatrix} c dt \\ dx \end{pmatrix} \quad (16.20)$

Vierer-Geschw:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \underset{\text{Skalar}}{\overset{16.19}{\gamma}} \gamma \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v \end{pmatrix} \quad (16.21)$$

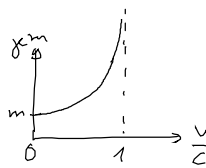
Vierer-Impuls:

$$\boxed{p^\alpha = m u^\alpha, \quad \begin{pmatrix} m \gamma c \\ m \gamma v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \underline{p} \end{pmatrix}} \quad (16.22)$$

Masse = Skalar

$$\boxed{\underline{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \underline{v}} \quad (16.23)$$

geschw. abhängige
Impulsgröße!



Impulsatz:

$$\boxed{\frac{dp^\alpha}{d\tau} = K^\alpha} \quad (16.24)$$

Viererkraft!?

(i) räumliche Komponenten: $\alpha = 1, 2, 3$

$$\frac{d\underline{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\underline{p}}{dt} \underset{\text{Newton}}{\gamma} \underline{\gamma F} = \underline{K} \quad (16.25)$$

macht Sinn: $\frac{v}{c} \rightarrow 0 \hat{=} \gamma = 1: \frac{d m \underline{v}}{dt} = \underline{F}!$

(ii) zeitliche Komponente: $\alpha=0$

- Geschwindigkeitsquadrat:

$$u^\alpha u_\alpha = \gamma^2 (-c^2 + v^2) = -c^2 \quad (16.26)$$

(16.21) $\quad -c^2(1-\frac{v^2}{c^2})$

- Betrachte: $\frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} u^\alpha u_\alpha = 0 = m u_\alpha \frac{du^\alpha}{d\tau} = u_\alpha \frac{dp^\alpha}{d\tau}$

$$\rightarrow 0 = u_\alpha K^\alpha = -\underbrace{u^0}_{\frac{1}{\gamma c}} K^0 + \gamma \mathbf{v} \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{K}}{\gamma F}}$$

also:
$$\boxed{\begin{aligned} K^0 &= \frac{\gamma}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \\ &= \frac{\gamma}{c} W \end{aligned}}$$

pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit

- Energiesatz! aus O.h.r. Komp. von Impulsatz

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \gamma \frac{dp^0}{dt} = K^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}} \quad (16.27)$$

mit $E = c p^0 = \underbrace{m \gamma c^2}_{(16.22)} \dots$ Energie eines Teilchens

Grenzf. $\frac{v}{c} \ll 1$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2 \approx m c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2} x$

$$\rightarrow \boxed{E = \underbrace{m c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{kinet. Energie}}} \quad (16.28)$$