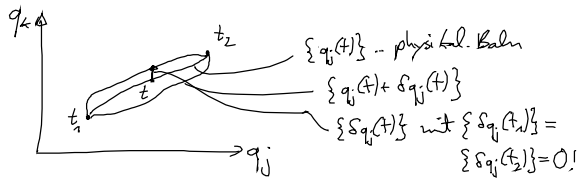


13. Das Hamiltonsche Prinzip

13.1 Das Hamiltonsche Prinzip



Physikal. Bahn gegeben durch:
 $\delta S = 0$ (Variation von $S = 0$)
 mit Wirkung $S = \int_{t_i}^{t_f} L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) dt$
 und L ... Lagrange-Fktn. (13.2)

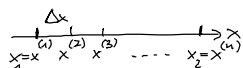
• kons. Kräfte: $Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$
 generalisiertes Pot.:
 Bah.: $L = T - U$
 $\delta S = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (13.3)

13.2 Euklide Variationsrech.

• 1D-Fall: $y(x)$
 funktional: $F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$ (13.4)

Ges: $y(x)$, so daß $F[y(x)]$ extremal! für festes $y(x_1), y(x_2)$

- diskretisierte Version:
 - zur Verdeutlichung
 - Vorgehens in der Numerik



$y(x^{(i)}) \rightarrow y_i$
 $y'(x^{(i)}) \rightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$

$$f(y, y', x) \rightarrow f(y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}, x^{(i)})$$

$$\int \dots dx \rightarrow \sum_i \dots \Delta x$$

$$F[y(x)] \rightarrow \bar{F}(y_1, \dots, y_n)$$

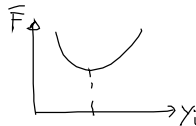
$$\text{Variation von } \bar{F}: \quad \delta \bar{F} = \bar{F}(y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n) - \bar{F}(y_1, \dots, y_n)$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} \delta y_i \quad (13.5)$$

$$\text{Extremum von } \bar{F}: \quad \delta \bar{F} = 0, \text{ beliebiges } \delta y_i \leftrightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} = 0 \quad (13.6)$$

(and saddle point)

(„horizontale Tangente“)



• kontinuierliche Version:

$$\text{Variation von } F: \quad \left[\begin{aligned} \delta F &= F[y(x) + \delta y(x)] - F[y(x)] \\ &\stackrel{!}{=} \int \underbrace{\frac{\delta F}{\delta y(x)}}_{\text{„Funktional ableitung“}} \delta y(x) dx \end{aligned} \right] \quad (13.7)$$

$$\text{vgl. mit (13.5):} \quad (i) \quad \sum_i \rightarrow \int \dots dx$$

$$(ii) \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} \rightarrow \frac{\delta F}{\delta y(x)}$$

$$\text{Extremum von } F: \quad \left[\begin{aligned} \delta F &= 0, \text{ beliebiges } \delta y(x) \\ &\rightarrow \frac{\delta F}{\delta y(x)} = 0 \end{aligned} \right] \quad (13.8)$$

$$\rightarrow \text{Ges: } \frac{\delta F}{\delta y(x)}$$

• Durchführung der Variation für (13.6):

$$\delta F = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \delta f(y(x), y'(x), x) dx$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx \quad (13.9) \quad [\delta x = 0!]$$

Wichtige Schritte:

$$(i) \quad \delta y' = \delta \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(x+\varepsilon) - y(x)}{\varepsilon} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta y(x+\varepsilon) - \delta y(x)}{\varepsilon}$$

$$\rightarrow \left[\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y(x) \right] \quad (13.10)$$

(ii) in (13.9) mit (13.10):

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y(x) dx \quad (13.11)$$

$$\stackrel{\text{part. Integ.}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y(x) \right] - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) \right\} dx !!$$

$$\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y(x) \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} = 0$$

weil $S_Y(x_1) = S_Y(x_2) = 0$

$$\rightarrow SF \stackrel{(13.11)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right]}_{\substack{SF \\ S_Y(x) \text{ !! in (13.7)}}} S_Y(x) dx \quad (13.12)$$

vgl. mit (13.7) $\rightarrow$

$$\boxed{\frac{SF}{S_Y(x)} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}} \quad (13.13)$$

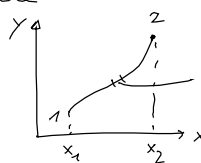
$$\boxed{SF=0 \iff \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0} \quad (13.14)$$

... Euler-Lagrange-Gl.
des Variationsproblems

Bsp:

1. Geodäten = Kurven mit kürzestem Abstand zwischen 2 Pkt.

a) Ebene



Wegelent. $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$
 $= dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (13.15)$
 $= (y')^2$

- Minimiere $L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1 + (y')^2}}_L dx$

$$SL=0 \stackrel{(13.14)}{\iff} \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} \stackrel{=0}{=} 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0 \rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{const.}$$

$$\rightarrow y' = c_1 \rightarrow \boxed{y = c_1 x + c_2}$$

... Gerade ✓

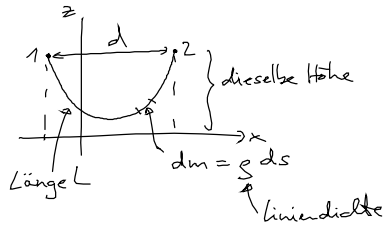
b) Kugel: Teil um Großkreis

Anw: Routen um
Flugzeugen



c) ART: Geodäten = Bahnkurven von Massepunkten
in gekrümmter 4D Raumzeit

2. Kettenlinie = Katnoide
 = Form $z(x)$ einer masse belegte Kette
 im homogenen Gravitationsfeld



$$\frac{\delta U}{\delta z(x)} = 0$$

- Minimiere pot. Energie:

$$U = g \int_1^2 dm z(x)$$

mit $dm = g ds \stackrel{(13.15)}{=} g dx \sqrt{1+(z')^2}$

$$\rightarrow U = g g \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{z(x) \sqrt{1+(z')^2}}_U dx$$

$$\delta U = 0 \xrightarrow{(13.14)} \frac{d}{dx} \frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} z \frac{z'}{\sqrt{1+(z')^2}} - \sqrt{1+(z')^2} = 0$$

...

$$\stackrel{a.b.}{\rightarrow} z z'' - (z')^2 = 1$$

[Hinweis: $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$
 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1!$

$$\rightarrow \boxed{z(x) = a \cosh \frac{x-x_0}{a}} \quad (13.16)$$

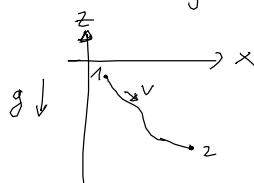
- Nebenbedingung: $L = \int_1^2 ds$ mit $dx = \sqrt{1+(z')^2}$
 feste Länge

...

$$\boxed{\frac{L}{2a} = \sinh \frac{d}{2a}} \quad (13.17)$$

Geg: $L, d \rightarrow a!$

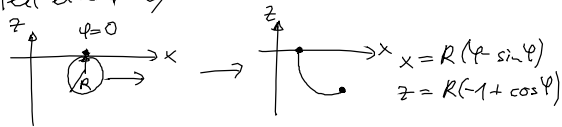
3. Brachistochronen-Problem: Kurve, auf der ein Teilchen
 in kürzester Zeit im homog. Grav. Feld zwischen
 2 Pkten fällt.



Minimiere:

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v} \quad (13.18)$$

→ Teil einer Zykloide:



13.3 Euler-Lagrange'sche Gl. 2. Art

• Herleitung aus Hamiltonsches Prinzip

a) kons. Kräfte / generalisierte Pot. ual:

• Lagrange'sche Fkt: $L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = T - U$

• Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dots) dt$

• Variation: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) dt = 0$

wie in Kap. 13.2 für jedes $y(x) \rightarrow q_j(t)$
 $y'(x) \rightarrow \dot{q}_j(t)$
 $x \rightarrow t$

$$(13.12) \rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j(t) dt = 0$$

$$\delta q_j \text{ unabh. variierbar} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (13.3) \quad \text{ged}$$

b) nicht konservative Kräfte

• L existiert nicht, statt dessen: (Sommerfeld!)

Variationsprinzip:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = 0} \quad (13.13)$$

$$\text{mit } \delta A = \sum_i \mathbf{F}_i^{(A)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j \quad [\text{vgl. (12.24)}]$$

... virtuelle Arbeit

• Ausführung der Variation:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right] \delta q_j dt \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1 \dots f} \quad (12.2c)!$$

o.k.V

• Warnung: Goldstein / Nolling

$$\cancel{L = T - U \text{ mit } U = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}$$

"Arbeit ist keine Zustandsgröße, hängt vom Weg ab" (s. Sommerfeld)