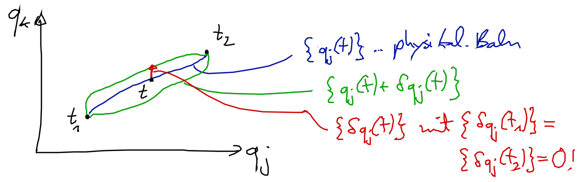
13. Das Hamiltonsche Prinzip

13.1 Das Hamiltonsche Prinzip



Physikal. Bahn gegeben durch:

$$\boxed{\delta S = 0} \quad \text{(„Variation von } S\text{“} = 0)$$

mit Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)\, dt$

und L ... Lagrange-Fktn. (13.2)

- kons. Kräfte:
  generalisiertes Pot.: $Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$

  Bed.: $L = T - U$

  $$\delta S = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (13.3)$$

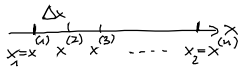
13.2 Eulersche Variationsrechnung

- 1D-Fall: $y(x)$

  Funktional: $F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx \quad (13.4)$, $\quad y' = \frac{dy}{dx}$

  Ges.: $y(x)$, so daß $F[y(x)]$ extremal! für festes $y(x_1), y(x_2)$

- diskretisierte Version:
  (i) zur Verdeutlichung
  (ii) Vorgehen in der Numerik



$$y(x^{(i)}) \longrightarrow y_i$$

$$y'(x^{(i)}) \longrightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

$$f(y,y',x) \longrightarrow f\left(y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}, x^{(i)}\right)$$

$$\int \ldots dx \longrightarrow \sum_i \ldots \Delta x$$

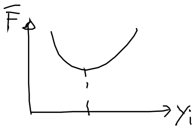
$$F[y(x)] \longrightarrow \bar{F}(y_1, \ldots, y_n)$$

Variation von $\bar{F}$: $\delta \bar{F} = \bar{F}(y_1+\delta y_1, \ldots, y_n+\delta y_n) - \bar{F}(y_1, \ldots, y_n)$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} \delta y_i \qquad (13.5)$$

Extremum von $\bar{F}$: (auch Sattelpunkt) $\quad \delta \bar{F} = 0$, beliebiges $\delta y_i \longleftrightarrow \dfrac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} = 0 \quad (13.6)$

(„horizontale Tangente")



- kontinuierliche Version:

Variation von F:

$$\boxed{\delta F = F[y(x)+\delta y(x)] - F[y(x)] \overset{!}{=} \int \underbrace{\frac{\delta F}{\delta y(x)}}_{\text{„Funktional-ableitung"}} \delta y(x)\, dx} \qquad (13.7)$$

vgl. mit (13.5): (i) $\sum_i \longrightarrow \int \ldots dx$

(ii) $\dfrac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} \longrightarrow \dfrac{\delta F}{\delta y(x)}$

Extremum von F:

$$\boxed{\delta F = 0, \text{ beliebiges } \delta y(x) \longrightarrow \frac{\delta F}{\delta y(x)} = 0} \qquad (13.8)$$

$\longrightarrow$ Ges: $\dfrac{\delta F}{\delta y(x)}$

- Durchführung der Variation für (13.4):

$$\delta F = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \delta f(y(x), y'(x), x)\, dx$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \underline{\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'}\right] dx \quad (13.9) \quad [\delta x = 0!]$$

wichtige Schritte:

(i) $\delta y' = \delta\left[\lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{y(x+\varepsilon) - y(x)}{\varepsilon}\right]$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta y(x+\varepsilon) - \delta y(x)}{\varepsilon}$$

$$\longrightarrow \boxed{\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y(x)} \qquad (13.10)$$

(ii) <u>In (13.9) mit (13.10):</u>

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y(x)\, dx \qquad (13.11)$$

$$\overset{\text{part. Integ}}{=} \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y(x)\right]\right.}_{\left.\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y(x)\right|_{x_1}^{x_2} = 0} \left. - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \delta y(x) \right\} dx \quad !!!$$

weil $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$

$$\longrightarrow \delta F \overset{(13.11)}{=} \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right]}_{\frac{\delta F}{\delta y(x)} \;\overset{!!}{\text{ in }}\; (13.7)} \delta y(x)\, dx \qquad (13.12)$$

$\xrightarrow{\text{vgl. mit}}$ (13.7)

$$\boxed{\frac{\delta F}{\delta y(x)} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}} \qquad (13.13)$$

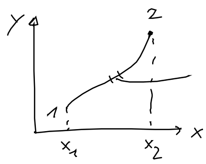
$$\boxed{\delta F = 0 \longleftrightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0} \qquad (13.14)$$

... Euler-Lagrange-Gl. des Variationsproblems

• Bsp:

1. $\boxed{\text{Geodäten = Kurven mit kürzestem Abstand zwischen 2 Pkt.}}$

a) Ebene



Wegelement: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$$= dx\sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}_{=(y')^2}} \qquad (13.15)$$

– Minimiere $L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1+(y')^2}}_{\ell}\, dx$

$$\delta L = 0 \underset{(13.14)}{\longleftrightarrow} \frac{d}{dx}\frac{\partial \ell}{\partial y'} - \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial y}}_{=0} = 0$$

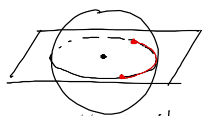
$$\longrightarrow \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0 \longrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{const.}$$

$$\longrightarrow y' = c_1 \longrightarrow \boxed{y = c_1 x + c_2}$$

... Gerade ✓

b) Kugel: Teil von Großkreis

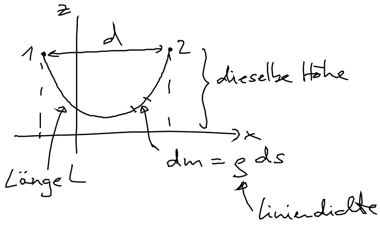
Anw: Routen von Flugzeugen



c) ART: Geodäten = Bahnkurven von Masseptkn in gekrümmter 4D Raumzeit

2. Kettenlinie = Katenoide

= Form $z(x)$ einer massebelegten Kette im homogenen Gravitationsfeld



$$\frac{\delta U}{\delta z(x)} = 0$$

– Minimiere pot. Energie:

$$U = g \int_1^2 dm\, z(x)$$

mit $dm = \varrho\, ds \overset{(13.15)}{=} \varrho\, dx \sqrt{1+(z')^2}$

$$\longrightarrow U = g\varrho \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{z(x)\sqrt{1+(z')^2}}_{u}\, dx$$

$$\delta U = 0 \xrightarrow[(13.14)]{} \frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dx} z \frac{z'}{\sqrt{\cdot/\cdot}} - \sqrt{\cdot/\cdot} = 0$$

$$\vdots$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad z z'' - (z')^2 = 1$$

[Hinweis: $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$!

$$\longrightarrow \boxed{z(x) = a \cosh \frac{x-x_0}{a}} \quad (13.16)$$

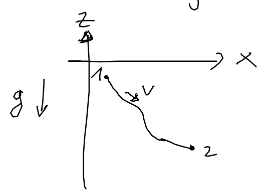
– Nebenbedingung: feste Länge L: $L = \int_1^2 ds$ mit $dx = \sqrt{1+(z')^2}$

$$\vdots$$

$$\boxed{\frac{L}{2a} = \sinh \frac{d}{2a}} \quad (13.17)$$

Geg: $L, d \longrightarrow a$!

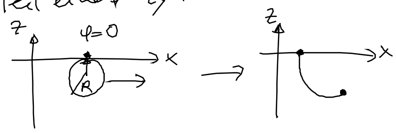
3. Brachistochronen-Problem: Kurve, auf der ein Teilchen in kürzester Zeit im homog. Grav.feld zwischen 2 Pkten fällt.



Minimiere:

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v} \quad (13.18)$$

$\longrightarrow$ Teil einer Zykloide:



$$x = R(\varphi - \sin\varphi)$$
$$z = R(-1+\cos\varphi)$$

13.3 Euler-Lagrangesche Gln. 2. Art

- Herleitung aus Hamiltonsche Prinzip

a) kons. Kräfte / generalisierte Potential:

- Lagrangesche Fkt: $L(\{q_j\},\{\dot q_j\},t) = T - U$
- Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dots)\,dt$
- Variation: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\{q_j\},\{\dot q_j\},t)\,dt = 0$

wie in Kap. 13.2 für jedes $y(x) \longrightarrow q_j(t)$
$y'(x) \longrightarrow \dot q_j(t)$
$x \longrightarrow t$

$$\xrightarrow{(13.12)} \quad \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right]\delta q_j(t)\,dt = 0$$

δq_j unabh. variierbar voneinander $\longrightarrow$ $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (13.3)
qed

b) nicht konservative Kräfte

- L existiert nicht, statt dessen: (Sommerfeld!)

Variationsprinzip:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)\,dt = 0 \qquad \text{mit } \delta A = \sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_j Q_j\,\delta q_j} \quad (13.19) \quad [\text{vgl. } (12.24)]$$

... virtuelle Arbeit

- Ausführung der Variation:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} + Q_j\right]\delta q_j\,dt \overset{!}{=} 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j\,, \quad j = 1 \dots f} \quad (12.26)!$$

o.k.V

- Vorsicht: Goldstein / Nolting

$\cancel{L = T - W \text{ mit } W = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{r}_i}$

„Arbeit ist keine Zustandsgröße, hängt vom Weg ab" (s. Sommerfeld)