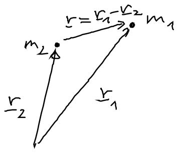
6. Bewegung im Zentralfeld

6.1 Problemstellung

- Geometrie:



Ww zwischen m_1 und m_2: Zentralpotential $U(\underline{r}) = U(r)$

$$\longrightarrow \quad \underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla} U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\underline{\nabla} r = -\frac{\partial U}{\partial r}\underline{e}_r \qquad (6.1)$$

„Zentralkraftfeld"

- <u>Bsp:</u> (i) Keplerproblem: $U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$ $\Big\}$ Gravitationspotential (3.3)

  $m_1 = m_{P(\text{lanet})}$

  $m_2 = m_{S(\text{onne})}$

  (ii) Streuung:
  Komet an Erde

  (iii) Wasserstoffatom: $U(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$

  (iv) Rutherfordstreuung: $U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$

  $\hookrightarrow$ α-Teilchen [$Z_1 = 2$.. Heliumkerne]
  Kernladungszahl
  gestreut an Goldfolie [$Z_2 = 79$]
  $\longrightarrow$ Nachweis: Atome = massiver Atomkern & e^--Wolke
  $\longrightarrow$ Atomphysik

  (v) Oszillator: $U(r) = \frac{1}{2} f r^2$ .... Schwingungen eines 2-atomigen Moleküls

6.2 Reduktion zum Einteilchen-Problem

- Zweikörperproblem ($\longrightarrow$ Kap. 9)

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad & m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = -\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \\ (2)\quad & m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \end{aligned}\right\} (6.2)$$

- Entkoppeln?

  „Schwerpkt. koordinate": $\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$
  [$\rightarrow$ Kap. 8] (6.3)
  Relativkoordinate: $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

$$\xleftrightarrow{\text{o.B.}} \quad \left\{\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\underline{r} \\ \underline{r}_2 &= \underline{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\underline{r} \end{aligned}\right. \qquad (6.4)$$

• Schwerpkts. bewegung:

$$\text{in}(6.2) \longrightarrow (1)+(2): \quad \text{l.S.}: \underbrace{(m_1+m_2)}_{M}\ddot{\underline{R}}$$

$$\text{r.S.}: -\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|) \underbrace{- \underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{-\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)} = 0$$

$$\left.\right\} \quad M\ddot{\underline{R}} = 0 \longrightarrow \underline{R} = \underline{a}t + \underline{b} \qquad (6.5)$$

$\longrightarrow$ kräftefreie Bewegung des Gesamtsystems mit Gesamtmasse $M = m_1+m_2$

• Relativbewegung:

$$\text{in } (6.2) \quad \frac{1}{m_1}(1) - \frac{1}{m_2}(2) \longrightarrow \underbrace{\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2}_{\ddot{\underline{r}}} = -\frac{1}{m_1}\underbrace{\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}|)} + \frac{1}{m_2}\underbrace{\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{-\underbrace{\underline{\nabla}_r}_{\underline{\nabla}} U(\underbrace{|\underline{r}|}_{r})}$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}_{\frac{1}{\mu} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}}\underline{\nabla} U(r)$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \mu\ddot{\underline{r}} &= -\underline{\nabla} U(r) \quad (6.6) \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \end{aligned}} \quad \text{... reduzierte Masse} \quad (6.7)$$

... effektives Teilchen im Zentralpotential ($\longrightarrow$ konserv. Kraftfeld)

$\longrightarrow$ Energieerhaltung [Kap. 2.4]
$\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung [Kap. 2.3]
} 4 Konstanten der Bewegung $\longrightarrow$ effektives 1D-Problem

<u>Bsp:</u> $m_1 = m_p \ll m_2 = m_S \longrightarrow \mu \approx \frac{m_p m_S}{m_S} \approx m_p$!!

6.3 Lösung des Einteilchen-Problems

a) Auswertung der Erhaltungssätze:

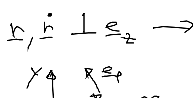
• Drehimpuls: [vgl. Kap. 2.3]

$$\underline{r}\times(6.6) \longrightarrow \underline{r}\times\mu\ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt}\underbrace{(\underline{r}\times\mu\dot{\underline{r}})}_{\underline{L}} - \underbrace{\dot{\underline{r}}\times\mu\dot{\underline{r}}}_{=0}$$

$$= -\underline{r}\times\underbrace{\underline{\nabla}U(r)}_{\sim \underline{e}_r \parallel \underline{r}} = 0!$$

$$\longrightarrow \underline{L} = \underline{r}\times\mu\dot{\underline{r}} = \text{konst.} = L\underbrace{\underline{e}_z}_{\text{o.B.d.A.}} \qquad (6.8)$$

$\underline{r}, \dot{\underline{r}} \perp \underline{e}_z \longrightarrow$ Bewegung in xy-Ebene: $\underline{r} = \underline{\varrho} = \varrho\,\underline{e}_\varrho$ ... Zylinderkoord. (Polar)



$$\longrightarrow \dot{\underline{r}} = (\varrho\underline{e}_\varrho)^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{\varrho}\underline{e}_\varrho + \varrho\dot{\underline{e}}_\varrho \underset{(1.4)}{=} \dot{\varrho}\underline{e}_\varrho + \underbrace{\varrho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi} \qquad (6.9)$$

$$\longrightarrow \underline{L} = \underline{\varrho}\times\mu\dot{\underline{\varrho}} \overset{(6.9)}{=} \mu\varrho\dot{\varphi}\underbrace{\underline{\varrho}\times\underline{e}_\varphi}_{\varrho\underline{e}_z}$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{L} = L\underline{e}_z \text{ mit } L = \mu\varrho^2\dot{\varphi}} \qquad (6.10)$$

• Energie: $\dot{\underline{r}} \cdot (6.6) \xrightarrow[\text{Kap. 2.4}]{} \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(r) = E$ (6.11)

mit $\dot{\underline{r}}^2 \underset{(6.9)}{=} \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 \underset{(6.10)}{=} \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}$

$$(6.11) \longrightarrow \boxed{\frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho) = E} \quad (6.12)$$

kinet. Energie: radial, azimutal

$\longrightarrow$ Umdeutung

eindim. Bewegung mit Koord. ρ in $U_{eff}(\rho)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho) = E \\ &U_{eff}(\rho) = U(\rho) + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu\rho^2}}_{\text{„Zentrifugalpotential": abstoßend } \to \infty,\ \rho \to 0} \end{aligned}} \quad (6.13)$$

Bew. gl. zu (6.13)

$$\frac{d}{dt}(6.13)/\dot{\rho} \longrightarrow \boxed{\mu\ddot{\rho} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial \rho} = \underbrace{\frac{L^2}{\mu\rho^3}}_{\text{„Zentrifugalkraft"}} - \frac{\partial U}{\partial \rho}}$$

„Zentrifugalkraft" = Scheinkraft, treibt Körper weg vom Zentrum

b) Lösung:

• folgt aus:

$$(6.10) \longrightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu\rho^2}} \quad (6.15)$$

$$(6.13) \longrightarrow \boxed{\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{eff}(\rho)]}} \quad (6.16)$$

• Integration von (6.16): $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$ & Sep. Variable

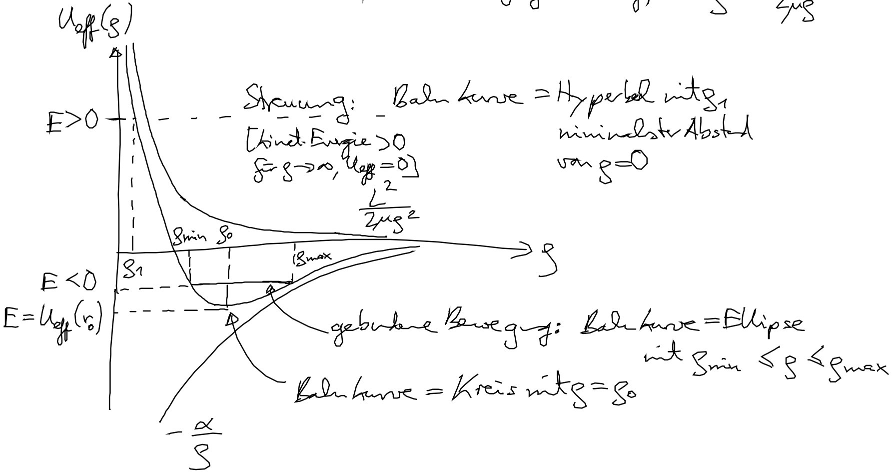
$$\boxed{\begin{aligned} &t - t_0 = \int_{\rho_0 = \rho(t_0)}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{eff}(\rho')]}} \longrightarrow \rho(t) \\ &\rho(t) \text{ in } (6.15) \longrightarrow \varphi(t) \end{aligned}} \quad (6.17)$$

• Gestalt der Bahnkurve: $\left.\begin{matrix}\rho(t)\\ \varphi(t)\end{matrix}\right\} \longrightarrow \rho = \rho(\varphi)$

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{d\rho} = \frac{(6.15)}{(6.16)} \xrightarrow[d\varphi = \dots d\rho]{\text{Integration}} \boxed{\begin{aligned} &\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{L/\rho'^2}{\sqrt{2\mu[E - U_{eff}(\rho')]}}\, d\rho' \\ &\longrightarrow \rho(\varphi) \end{aligned}} \quad (6.18)$$

c) Qualitative Diskussion: für Keplerproblem: [s. Kap. 6.4]

Radialbewegung mit $U_{eff} = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$



6.4. Das Keplerproblem

- Potential: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha = \begin{cases} \gamma m_1 m_2 & \text{... Grav. potential} \\ -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} & \text{... Coulombpot.} \end{cases}$

  $\alpha > 0$ ... anziehendes Pot.

  (< 0 ... abstoßendes Pot.)

a) Lösung und Diskussion

- Bahnkurve: (6.18), $\varphi_0 = 0 \longrightarrow \varphi = \int \frac{L/\rho^2}{\sqrt{2\mu\underbrace{\left[E + \frac{\alpha}{\rho} - \frac{L^2}{2\mu\rho^2}\right]}_{-U_{eff}(\rho)}}}\, d\rho$

Stammfkt.:

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{1}{\rho},\ du = -\frac{d\rho}{\rho^2} \\ a = \frac{2\mu E}{L^2},\ b = \frac{\mu\alpha}{L^2} \end{array}\right\} \quad \varphi = -\int \frac{du}{\sqrt{a + 2bu - u^2}}$$

$$\underset{\text{o.B.}}{=} \arccos \frac{b-u}{\sqrt{b^2+a}}$$

$$\longrightarrow \varphi = \arccos \frac{\frac{\mu\alpha}{L^2} - \frac{1}{\rho}}{\sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}}} \qquad (6.19)$$

- Führe ein

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} \text{Parameter: } p = \frac{L^2}{\mu\alpha} \\ \text{Exzentrizität: } \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \end{array}}\ \right\}\ (6.20) \quad (6.19) \longrightarrow \boxed{\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}} \quad (6.21)$$

... „Kegelschnitt" in Polarkoordinaten