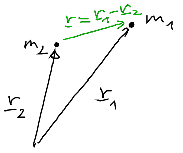
6. Bewegung im Zentralfeld

6.1 Problemstellung

• Geometrie:



Ww zwischen m_1 und m_2: Zentralpotential $U(\underline{r}) = U(r)$

$$\longrightarrow \quad \underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\, U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\underline{\nabla}\, r = -\frac{\partial U}{\partial r}\,\underline{e}_r \qquad (6.1)$$

„Zentralkraftfeld"

• Bsp: (i) Keplerproblem: $U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$ } Gravitationspotential (3.3)

$m_1 = m_{P(lanet)}$

$m_2 = m_{S(onne)}$

(ii) Streuung:
Komet an Erde

(iii) Wasserstoffatom: $U(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$

(iv) Rutherfordstreuung: $U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$

↳ α-Teilchen [$Z_1 = 2$.. Heliumkerne]
Kernladungszahl
gestreut an Goldfolie [$Z_2 = 79$]
→ Nachweis: Atome = massiver Atomkern & e^--Wolke
→ Atomphysik

(v) Oszillator: $U(r) = \frac{1}{2} f r^2$ .... Schwingungen eines 2-atomigen Moleküls 

6.2 Reduktion zum Einteilchen-Problem

• Zweikörperproblem (→ Kap. 9)

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = -\underline{\nabla}_1\, U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \\ &(2)\quad m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\underline{\nabla}_2\, U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \end{aligned}\right\} (6.2)$$

• Entkoppeln?

„Schwerpkt. koordinate": $\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$

[→ Kap 8] (6.3)

Relativkoordinate: $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

$$\overset{\text{o.B.}}{\longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\underline{r} \\ \underline{r}_2 &= \underline{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\underline{r} \end{aligned}\right. \qquad (6.4)$$

• <u>Schwerpkts. bewegung:</u>

in (6.2) $\longrightarrow$ (1)+(2): LS: $\underbrace{(m_1+m_2)}_{M}\ddot{\underline{R}}$

r.S.: $-\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|) - \underbrace{\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{-\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)} = 0$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad M\ddot{\underline{R}} = 0 \quad \longrightarrow \underline{R} = \underline{a}\,t + \underline{b} \qquad (6.5)$$

$\longrightarrow$ kräftefreie Bewegung des Gesamtsystems mit Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$

• <u>Relativbewegung:</u>

in (6.2) $\frac{1}{m_1}(1) - \frac{1}{m_2}(2) \longrightarrow$

$$\underbrace{\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2}_{\ddot{\underline{r}}} = -\frac{1}{m_1}\underbrace{\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}|)} + \frac{1}{m_2}\underbrace{\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{-\underbrace{\underline{\nabla}_r}_{\underline{\nabla}} U(\underbrace{|\underline{r}|}_{r})}$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}_{\frac{1}{\mu} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}}\underline{\nabla}U(r)$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \mu\ddot{\underline{r}} = -\underline{\nabla}U(r) \\ \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \end{matrix}} \quad \begin{matrix} (6.6) \\ \text{... reduzierte Masse} \\ (6.7) \end{matrix}$$

... effektives Teilchen im Zentralpotential ($\longrightarrow$ konserv. Kraftfeld)

$\longrightarrow$ Energieerhaltung [Kap. 2.4]
$\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung [Kap. 2.3] } 4 Konstanten der Bewegung
$\longrightarrow$ effektives 1D-Problem

<u>Bsp:</u> $m_1 = m_p \ll m_2 = m_s \longrightarrow \mu \approx \frac{m_p m_s}{m_s} \approx m_p$!!

6.3 <u>Lösung des Einteilchen-Problems</u>

a) <u>Auswertung der Erhaltungssätze:</u>

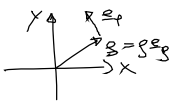
• <u>Drehimpuls:</u> [vgl. Kap. 2.3] $\underline{r}\times(6.6) \longrightarrow$

$$\underline{r}\times\mu\ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt}\underbrace{(\underline{r}\times\mu\dot{\underline{r}})}_{\underline{L}} - \underbrace{\dot{\underline{r}}\times\mu\dot{\underline{r}}}_{=0}$$

$$= -\underline{r}\times\underbrace{\underline{\nabla}U(r)}_{\sim\underline{e}_r \parallel \underline{r}} = 0!$$

$$\longrightarrow \underline{L} = \underline{r}\times\mu\dot{\underline{r}} = \text{konst.} = L\underbrace{\underline{e}_z}_{\text{o.B.d.A.}} \qquad (6.8)$$

$\underline{r}, \dot{\underline{r}} \perp \underline{e}_z \longrightarrow$ Bewegung in xy-Ebene: $\underline{r} = \underline{\varrho} = \varrho\,\underline{e}_\varrho$ ... Zylinderkoord. (Polar)



$$\longrightarrow \dot{\underline{r}} = (\varrho\underline{e}_\varrho)^{\cdot} = \dot{\varrho}\underline{e}_\varrho + \varrho\dot{\underline{e}}_\varrho \underset{(1.4)}{=} \dot{\varrho}\underline{e}_\varrho + \underbrace{\varrho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi}_{} \qquad (6.9)$$

$$\longrightarrow \underline{L} = \underline{\varrho}\times\mu\dot{\underline{\varrho}} \overset{(6.9)}{=} \mu\varrho\dot{\varphi}\underbrace{\underline{\varrho}\times\underline{e}_\varphi}_{\varrho\underline{e}_z}$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{L} = L\,\underline{e}_z \quad \text{mit } L = \mu\varrho^2\dot{\varphi}} \qquad (6.10)$$

• Energie: $\dot{\underline{r}}\cdot(6.6) \xrightarrow[\text{Kap. 2.4}]{} \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(r) = E \quad (6.11)$

mit $\dot{\underline{r}}^2 \underset{(6.9)}{=} \dot\varrho^2 + \varrho^2\dot\varphi^2 \underset{(6.10)}{=} \dot\varrho^2 + \frac{L^2}{\mu^2\varrho^2}$

$$(6.11) \longrightarrow \boxed{\frac{\mu}{2}\underbrace{\dot\varrho^2}_{\text{radial}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu\varrho^2}}_{\text{azimuthal}} + U(\varrho) = E} \quad (6.12)$$

kinet. Energie: radial azimuthal

$\longrightarrow$ Umdeutung
eindim. Bewegung
mit Koord. ϱ in
$U_{eff}(\varrho)$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\mu}{2}\dot\varrho^2 + U_{eff}(\varrho) = E \quad (6.13)\\ &U_{eff}(\varrho) = U(\varrho) + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu\varrho^2}}\end{aligned}}$$

„Zentrifugalpotential": abstoßend
$\to \infty, \varrho \to 0$

Bew. gl. zu (6.13)

$$\frac{d}{dt}(6.13)/\dot\varrho \longrightarrow \boxed{\mu\ddot\varrho = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial\varrho} = \underbrace{\frac{L^2}{\mu\varrho^3}} - \frac{\partial U}{\partial\varrho}}$$

„Zentrifugalkraft"
= Scheinkraft, treibt
Körper weg vom Zentrum

b) Lösung:

• folgt aus:

$$(6.10) \longrightarrow \dot\varphi = \frac{L}{\mu\varrho^2} \quad (6.15)$$

$$(6.13) \longrightarrow \dot\varrho = \sqrt{\frac{2}{\mu}[E-U_{eff}(\varrho)]} \quad (6.16)$$

• Integration von (6.16): $\dot\varrho = \frac{d\varrho}{dt}$ & Sep. Variable

$$t - t_0 = \int_{\varrho_0=\varrho(t_0)}^{\varrho} \frac{d\varrho'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E-U_{eff}(\varrho')]}} \longrightarrow \varrho(t) \quad (6.17)$$

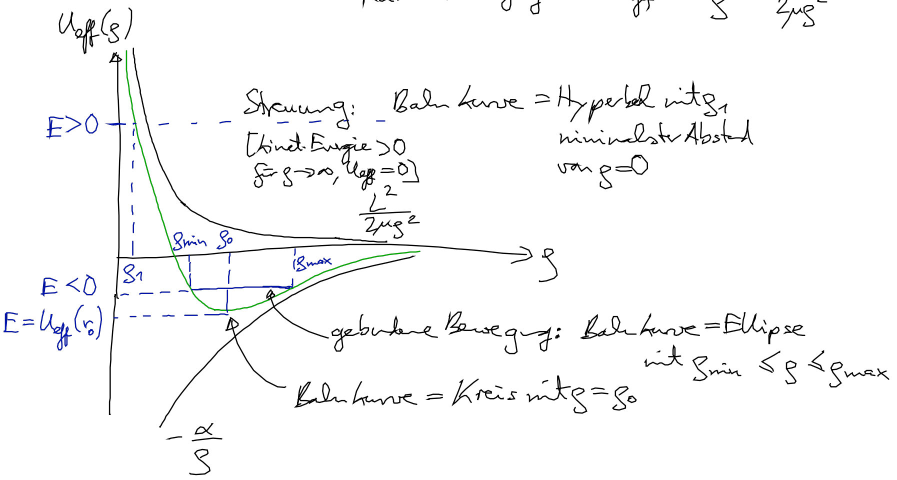
$\varrho(t)$ in $(6.15) \longrightarrow \varphi(t)$

• Gestalt der Bahnkurve: $\left.\begin{matrix}\varrho(t)\\ \varphi(t)\end{matrix}\right\} \longrightarrow \varrho = \varrho(\varphi)$

$$\frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{d\varrho} = \frac{(6.15)}{(6.16)} \xrightarrow[d\varphi = \dots d\varrho]{\text{Integration}} \boxed{\varphi - \varphi_0 = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{L/\varrho'^2}{\sqrt{2\mu[E-U_{eff}(\varrho')]}}\, d\varrho' \longrightarrow \varrho(\varphi)} \quad (6.18)$$

c) Qualitative Diskussion: für Keplerproblem: [s. Kap. 6.4]

Radialbewegung mit $U_{eff} = -\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{L^2}{2\mu\varrho^2}$



6.4. Das Keplerproblem

- Potential: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha = \begin{cases} \gamma m_1 m_2 & \text{... Grav. potential} \\ -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} & \text{... Coulombpot.} \end{cases}$

  $\alpha > 0$ ... anziehendes Pot.
  (<0 ... abstoßendes Pot.)

a) Lösung und Diskussion

- Bahnkurve: (6.18), $\varphi_0 = 0 \longrightarrow \varphi = \int \frac{L/\varrho^2}{\sqrt{2\mu[E + \underbrace{\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{L^2}{2\mu\varrho^2}}_{-U_{eff}(\varrho)}]}}\, d\varrho$

Stammfkt.

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{1}{\varrho},\ du = -\frac{d\varrho}{\varrho^2} \\ a = \frac{2\mu E}{L^2},\ b = \frac{\mu\alpha}{L^2} \end{array}\right\} \quad \varphi = -\int \frac{du}{\sqrt{a + 2bu - u^2}}$$

$$\underset{\text{o.B.}}{=} \arccos \frac{b-u}{\sqrt{b^2+a}}$$

$$\longrightarrow \quad \varphi = \arccos \frac{\frac{\mu\alpha}{L^2} - \frac{1}{\varrho}}{\sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}}} \qquad (6.19)$$

- Führe ein

(6.20)

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} \text{Parameter: } p = \frac{L^2}{\mu\alpha} \\ \text{Exzentrizität: } \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \end{array}}\right\} (6.19) \longrightarrow \boxed{\varrho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}} \quad (6.21)$$

... „Kegelschnitt" in Polarkoordinaten