

12.5 Lagrangesche Gleichungen 2. Art

- generalisierte Koord.: $q_1, \dots, q_s$, $f = 3N - Z$

$$\rightarrow r_i = r_i(q_1, \dots, q_s, t) \quad (12.21)$$

- Ziel: Beschreibe Dynamik der $q_1^{(t)} \dots q_s^{(t)} \xrightarrow{(12.21)} r_i(t)$

kein Zugang zu den Zwangskräften

Hilfsformel: (i) $\dot{r}_i \stackrel{(12.21)}{=} \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (12.22)$

(ii) $\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$, $\delta t = 0 \quad (12.23)$

d'Alembert: $\sum_i (F_i^{(H)} - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (12.15)$

(i) $\sum_i F_i^{(H)} \cdot \delta r_i \stackrel{(12.23)}{=} \sum_j \underbrace{\sum_i F_i^{(H)} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}}_{Q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \quad (12.24)$

$$Q_j = \sum_i F_i^{(H)} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (12.25)$$

... generalisierte Kraft

(ii) $\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i \stackrel{(12.23)}{=} \sum_j \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$

$\frac{d}{dt}(\dots) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \dots$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \\ & \stackrel{(12.22)}{=} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(m_i \dot{r}_i^2 \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{r}_i \\ & = \sum_j \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{r}_i \\ & = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \right) \end{aligned}$$

mit $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$

... kinetische Energie

$$\rightarrow \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

(12.15): (i) - (ii) = 0

$$\rightarrow \sum_j \left\{ Q_j - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j = 0$$

alle unabh. voneinander:
holonome Bindung!
 $\delta q_k \neq 0$, $\delta q_j = 0$, $\forall j \neq k$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (12.26)$$

... Lagrangesche Gln. 2. Art (im allgemeinen)

Sonderfälle

a) konservative Systeme:

wichtig!!!

$$\vec{F}_i^{(k)} = -\nabla_i U \quad (11.27)$$

mit $U = U(r_1, \dots, r_N)$
 $= U(r_1(\dots q_1, \dots, t), \dots, r_N(\dots))$

damit: $Q_j^{(12.25)} = \sum_i \vec{F}_i^{(k)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$$\rightarrow Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (12.28)$$

also: (12.26) $\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = 0$

da $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (12.29)$$

... Lagrangesche Gln.

mit $L = T - U \quad (12.30)$

... Lagrange Funktion

(" " 2. Art, im speziellen)

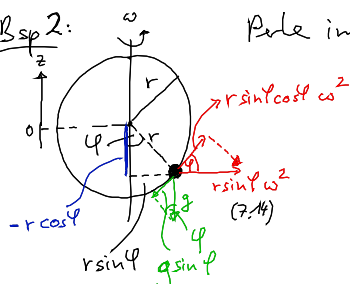
• Bsp 1: Teilchen in 3D: $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow q_j = x_j, j=1,2,3$

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \sum_j \dot{x}_j^2 \\ U &= U(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} L = T - U$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = - \frac{\partial U}{\partial x_j} = F_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j$$

(12.29) $\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \rightarrow m \ddot{x}_j = F_j \quad \checkmark$

• Bsp 2:



Partikel im rotierenden Drehring (ohne Reibung)

(i) generalisierte Koord.: φ

(ii) Geschw. Komp.: $r \dot{\varphi}$ auf Ring & $\omega r \sin \varphi$ rot. Ring

$$\rightarrow T = \frac{m}{2} r^2 (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi)$$

(iii) $U = mgz = -mgr \cos \varphi$

$$\rightarrow L = T - U = \frac{m}{2} r^2 (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi) + mgr \cos \varphi$$

(iv) Bew. gl.: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = mr^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mgr \sin \varphi$
 $= mr(r\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$$

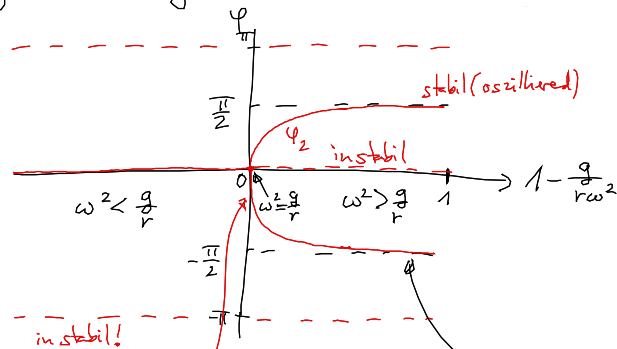
$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = mr \left[\underbrace{r \ddot{\varphi}}_{\substack{\text{Beschl.} \\ \text{von } m}} - \underbrace{(r\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi)}_{\substack{\text{Komp. Zentrifugal-} \\ \text{beschl.} \quad \text{Erdbeschl.} \parallel \text{Ring}}} \right] = 0$$

(v) Diskussion:

1. stationäre Lsg.: $\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \sin \varphi_1 = 0 \rightarrow \varphi_1 = 0, 180^\circ$
 $\sin \varphi (r\omega^2 \cos \varphi - g) = 0 \quad \cos \varphi_2 = \frac{g}{r\omega^2}$

2. Verhalten gegen Störungen: ... Übungen

3. Bifurkationsdiagramm: für stationäre Lsg.



$$\cos \varphi_2 \approx 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} = \frac{g}{r\omega^2}$$

$$\rightarrow \varphi_2 = \pm \sqrt{2 \left(1 - \frac{g}{r\omega^2} \right)}$$

$\hat{=}$ Bifurkation der $\varphi=0$ Lsg. in zwei gleichw. Lsg. (Symmetriebrechung!)

(vi) Musterbeispiel für dynam. Systeme

NB: Bifurkation = qualitative Änderung der Lsg.
eines Systems von Dgl. bei Durch-
schreiten eines Parameter!
→ dynamische Systeme

charakt. Bifurkationstypen:

1D: (i) Pitchfork (Mist-gabel) - Bifurkation



(ii) Saddle-node (Sattel-Knoten) - Bifurkationen



"Annihilation"
von stabilem
und instabilem
Fixpunkt

(iii) Transcritical (transkritische) - Bifurkation



2D: z.B. Hopf - Bifurkation



von "Normalformen"