

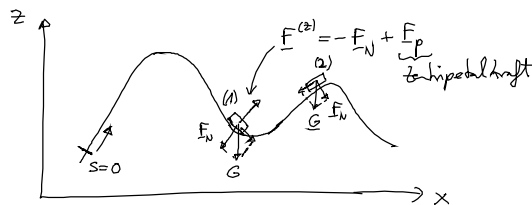
III. Analytische Mechanik

• Motivation:

- (i) Formalisierung der Newtonschen Mechanik
- (ii) „elegante“ Lsg. Wege für mechan. Probleme
 - Zwangsbed.
 - Zwangskräfte
 } → Ingenieurwissen-schaffen
- (iii) Formulierung der Quantenmechanik
- (iv) Grundprinzipien zur Erzeugg/Formulierung
 - (1) elementare Wechselw. in der Natur
 - Integralprinzipien
 - Extremal
 - (2) Dynamik komplexer Materialien [Poisson-Klammer]

- #### • Lit.:
- (i) Goldstein
 - (ii) Sommerfeld
 - (iii) Nolting

• illustrierendes Bsp. zu (ii): Achterbahn



- festgelegte 1D-Bahn in xz -Ebene: $z = z(x)$... Zwangsbedingung
- generalisierte Koord. zur Zeit t : z.B. $x(t) \xrightarrow{(*)} z(t) = z(x(t))$
 z.B. $s(t) \xrightarrow{(*)} x(t), z(t)$
- Zwangskräfte $F^{(z)}$ [von Schienen auf Wagen]
 [Zwingen Wagen auf 1D Bahn] } konstruierbar
 Ingenieur
- in (2): Wagen hebt nicht ab für $|F_G| \leq |F_N|$

• Def:

Zwangsbedingungen: beschreiben eingeschränkte Bewegung von Massephtn. (12.1)

Zwangskräfte : verursachen " " "

12. Lagrangesche Gleichungen

- Erinnerung: System von N Massephton.

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \underbrace{\mathbf{F}_i^{(a)}}_{\text{äußere}} + \underbrace{\sum_j \mathbf{F}_{ij}}_{\text{innere Kräfte}} \quad (8.1)$$

hier: $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \underbrace{\mathbf{F}_i^{(t)}}_{\text{triebende Kräfte}} + \underbrace{\mathbf{F}_i^{(z)}}_{\text{Zwangs-Kräfte}} \quad (12.1)$

$NB:$ $i, j = 1 \dots N$
 steht v. m.
 (vgl. Kap 8)

- Problem: $\mathbf{F}_i^{(z)}$ unbekannt

Ziel: (i) Bestimme „eingeschränkte“ Bewegung
 ohne Kenntnis von $\mathbf{F}_i^{(z)}$ $\rightarrow$ Physiker
 [$\rightarrow$ Lagrange 2. Art]

(ii) Berechne nach $\mathbf{F}_i^{(z)}$ $\rightarrow$ Ingenieur
 [$\rightarrow$ Lagrange 1. Art]

- Zahl f der mechan. Freiheitsgrade:

$$f = 3N - Z \quad (12.2)$$

f (generalisierte) Koord. beschreiben Lage von N Massephton eindeutig
 $3N$ Lage-Koord. (z.B. kartesisch)
 Z Zahl der Zwangsbed.

12.1 Zwangsbedingungen & generalisierte Koord.

- (i) holonome Zwangsbed.: (griech: holos = ganz, integrierbar)

- integrale Darstellung:

Bindungsgl.:

$$\Phi^{(v)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, Z \quad (12.3)$$

... verknüpft $3N$ Ortskoord.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \Phi^{(v)}}{\partial t} = 0 \quad \dots \text{skleronom} \\ \frac{\partial \Phi^{(v)}}{\partial t} \neq 0 \quad \dots \text{rheonom} \end{array} \right]$$

- generalisierte Koord.: $q_1, \dots, q_s$

(i) mit $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, \dots, q_s, t)$
 $\vdots$
 $\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(q_1, \dots, q_s, t) \quad (12.4)$

(ii) erfüllen über (12.4) dann (12.3) $\forall q_1, \dots, q_s, t$
 „sind unabh. voneinander“

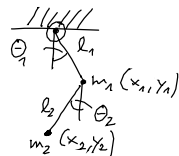
(iii) beschreiben Zustand eindeutig

(iv) spannen Konfigurationsraum auf

(v) nicht eindeutig

• Bsp: (1) Adlerbahn: $\phi^{(1)} = z - z(x) = 0$
 $q_1 = x$ oder s

(2) Doppelpendel



$$\phi^{(1)} = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

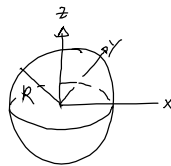
$$\phi^{(2)} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$$q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$$

(3) Bewegung auf Kugeloberfläche:

$$\phi^{(1)} = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$q_1 = \vartheta, q_2 = \varphi \quad \dots \text{Kugel Koord.}$$



(4) starrer Körper: $\phi^{(ij)} = (r_i - r_j)^2 - d_{ij}^2 = 0$

• differentielle Darstellung: mit $r_k = (x_k, y_k, z_k)$
 $= (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$

führe ein: $\phi_k^{(v)} = \left(\frac{\partial \phi^{(v)}}{\partial x_{k1}}, \frac{\partial \phi^{(v)}}{\partial x_{k2}}, \frac{\partial \phi^{(v)}}{\partial x_{k3}} \right) \quad (12.5)$
 $\phi_{k1}^{(v)} \dots \dots \dots$ Komp.: $\phi_{k\alpha}^{(v)}, \alpha=1,2,3$

differentielle Verdrückung der r_k um $dr_k, k=1, \dots, N$ $\frac{dr_k}{r_k}$

müssen erfüllen: $\phi^{(v)}(r_1 + dr_1, \dots) = 0$

$$\rightarrow \boxed{d\phi^{(v)} = \sum_{k=1}^N \phi_k^{(v)} \cdot dr_k = 0} \quad (12.6) \quad v=1,2,\dots,2$$

$$\phi^{(v)}(r_1 + dr_1, \dots) - \phi^{(v)}(r_1, \dots)$$

$$\sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \phi_{k\alpha}^{(v)} dx_{k\alpha} \quad (12.7)$$

Beachte: $\frac{\partial^2 \phi^{(v)}}{\partial x_{i\alpha} \partial x_{j\beta}} = \frac{\partial \phi_{j\beta}^{(v)}}{\partial x_{i\alpha}} = \frac{\partial \phi_{i\alpha}^{(v)}}{\partial x_{j\beta}} = \frac{\partial^2 \phi^{(v)}}{\partial x_{j\beta} \partial x_{i\alpha}}$
 ... Integrabilitätsbed!

umgekehrt

Geg: $\phi_k^{(v)}$ mit (12.7) $\rightarrow \phi^{(v)}$ existiert

Zygl: $E, \text{rot} E = 0 \rightarrow E = \text{grad } U$

(ii) anholonome Zwangsbed.: $\phi^{(v)}(\dots) = 0$ existiert nicht
 „nicht integrierbar“ = anholonom

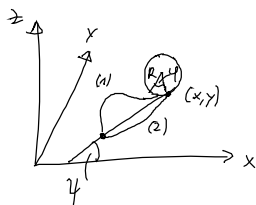
(1) Ungleichungen

Bsp: Bewegung außerhalb Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0$

(2) nur Einschränkung der Variablen im Infinitesimalen:

$$\sum_{k=1}^N \phi_k^{(v)} \cdot dr_k = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \phi_{\alpha\beta}^{(v)}}{\partial x_{i\alpha}} \neq \frac{\partial \phi_{i\alpha}^{(v)}}{\partial x_{\alpha\beta}} \quad (12.8)$$

Bsp: Abrollen einer Scheibe ohne „Schlupf“



Konfig. der Scheibe:

Anlagepkt. x, y

Orientierung: ψ

Drehwinkel: φ

NB: $r_k \rightarrow x, y, \psi, \varphi$

(i) holonome Zwangsbed.: $\varphi = \varphi(x, y)$

nein: Wege (1), (2) $\rightarrow \varphi$ ist wegababhängig!

(ii) anholonome Zwangsbed.:

Geschw. Scheibe: $v = R \dot{\varphi} \rightarrow ds = R d\varphi$ (*)

$$dx = ds \cos \psi \quad (1')$$

$$dy = ds \sin \psi \quad (2')$$

$$(1') \xrightarrow{(*)} 1 dx - R \cos \psi d\varphi = 0 \quad (1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ anholonome} \\ \text{Zwangsbed.} \end{array}$$

$$(2') \xrightarrow{(*)} 1 dy - R \sin \psi d\varphi = 0 \quad (2)$$

vgl. mit (12.8): $\phi_x^{(v)} = 1, \phi_y^{(v)} = 0, \phi_\psi^{(v)} = -R \cos \psi, \phi_\varphi^{(v)} = 0$

Integrabilität: $\frac{\partial \phi_\psi^{(v)}}{\partial \psi} = R \sin \psi \neq \frac{\partial \phi_\varphi^{(v)}}{\partial \varphi} = 0$

$$\rightarrow \text{kein } \phi^{(v)}(x, y, \psi, \varphi) = 0!$$