III. Analytische Mechanik

12. Lagrangesche Gleichungen

$$\boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underbrace{\underline{F}_i^{(t)}}_{\text{treibende Kraft}} + \underbrace{\underline{F}_i^{(z)}}_{\text{Zwangskräfte}}} \qquad i=1,\dots,N \qquad (12.1)$$

12.1 Zwangsbedingungen & generalisierte Koord.

(i) holonome Zwangsbed.

$$\boxed{\phi^{(\nu)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N, t) = 0 \;, \quad \nu = 1, 2, \dots Z} \quad (12.3)$$

$\frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial t} = 0$ .... skleronom

$\frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial t} \neq 0$ .... rheonom

(ii) anholonome Zwangsbed.

$\phi^{(\nu)}(\dots\dots) = 0$ existiert nicht

nur Einschränkung von kleinen Veränderungen

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{\phi}_k^{(\nu)} \cdot d\underline{r}_k = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \phi^{\nu}_{k\beta}}{\partial x_{i\alpha}} \neq \frac{\partial \phi^{\nu}_{i\alpha}}{\partial x_{k\beta}}} \quad (12.8)$$

12.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeit

- hier: Statik, auch für Dynamik gültig!
- Unterscheide:

$$\boxed{\begin{array}{ll} d\underline{r}_i \; \dots & \text{reale, infinitesimale Veränderung}, \; dt \neq 0 \\ \delta \underline{r}_i \; \dots & \text{virtuelle} \quad \text{"} \qquad \text{"} \quad , \; \delta t = 0 \end{array}}$$

verträglich mit Zwangsbed.

- System im GG:

(12.1) $\longrightarrow \quad \underline{F}_i = \underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}_i^{(z)} = 0 \;, \quad i = 1, \dots, N \qquad (12.9)$

$\longrightarrow$ virtuelle Arbeit durch $\delta \underline{r}_i$:

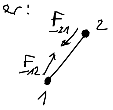
$$\delta A = \sum_i \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \delta \underline{r}_i + \sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \qquad (12.10)$$

• Sommerfeld:

Postulat: $\boxed{\text{„Bei jedem glatt geführten mechan. System ist die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte gleich Null": } \sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (12.11)}$

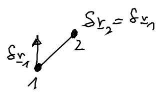
Goldstein: Beschränkung auf Systeme mit (12.11)

• Bsp: (i) starrer Körper:



$\underline{F}_1^{(z)} = \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} = -\underline{F}_2^{(z)}$ (actio = reactio)

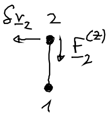
(1) Translation



(12.11) $\longrightarrow \underline{F}_1^{(z)} \delta \underline{r}_1 + \underline{F}_2^{(z)} \delta \underline{r}_2$

$= \underbrace{(\underline{F}_1^{(z)} + \underline{F}_2^{(z)})}_{=0} \delta \underline{r}_1 = 0$

(2) Rotation:



$\underline{F}_2^{(z)} \cdot \delta \underline{r}_2 = 0, \quad \underline{F}_2^{(z)} \perp \delta \underline{r}_2$

(ii) Achterbahn: $\underline{F}^{(z)} \perp \delta \underline{r}$

• also: Prinzip der virtuellen Arbeit

(12.10) mit (12.11) $\longrightarrow$ $\boxed{\sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \delta \underline{r}_i = 0}$ (12.12)

... virtuelle Arbeit der „treibenden" Kräfte verschwindet

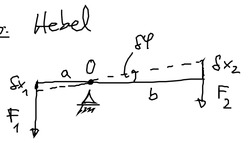
• Bemerkungen:

(i) (12.12) bestimmt gesamte Statik!

(ii) Haftreibungskräfte $= \underline{F}^{(z)}$

Gleit " " $= \underline{F}^{(t)}$

• Bsp. Hebel



GG? (12.12) $\longrightarrow$

$F_1 \underbrace{\delta x_1}_{a\,\delta\varphi} + F_2 \underbrace{\delta x_2}_{-b\,\delta\varphi} = 0$

$\longrightarrow (F_1 a - F_2 b)\,\delta\varphi = 0$

$\longrightarrow F_1 a = F_2 b$ (12.13)

$\hat{=}$ GG der Drehmomente um O ✓

12.3 Das d'Alembertsche Prinzip

- Ziel: erweitere (12.12) auf Dynamik
- „Kunstgriff":

Newton: $\underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}_i^{(z)} = \boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\underline{F}^*}$ (12.14)

... d'Alembertsche Trägheitskraft/-widerstand

(i) fiktive Kraft

(ii) Scheinkräfte [vgl. (7.3)]

⟶ z.B. Zentrifugalkraft (Achterbahn)

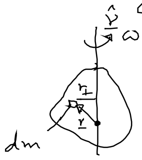
- virtuelle Arbeit

$$\sum_i \underbrace{(\underline{F}_i - m_i \ddot{\underline{r}}_i)}_{=0} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad \& \quad \underbrace{\sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta \underline{r}_i = 0}_{\text{auch in der Dynamik}}$$

$\overrightarrow{\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}_i^{(z)}}$ $\quad \boxed{\sum_i (\underline{F}_i^{(t)} - m_i \ddot{\underline{r}}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0}$ (12.15)

... d'Alembertsche Prinzip (Differentialprinzip)

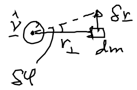
- Bsp.: Drehung eines starren Körpers um feste Achse:



i.f. $\sum_i \to \int$

(1) $\int \underbrace{d\underline{F}^{(t)} \cdot \delta \underline{r}}_{\substack{d\underline{F}^{(t)} \parallel \delta \underline{r}\,! \\ \text{Rest } d\underline{F}^{(z)}}} = \int dF^{(t)} \underbrace{\delta r}_{r_\perp \delta\varphi} = D^{(t)} \delta\varphi$

ges. treibende Drehmoment



(2) $\int \delta m \ddot{\underline{r}} \cdot \delta \underline{r} = \int \delta m \underbrace{\dot{v}}_{r_\perp \dot{\omega}} \underbrace{\delta r}_{r_\perp \delta\varphi} = \delta\varphi\, \dot{\omega}\, \Theta$

Zentrifugalkraft ⊥ $\delta \underline{r}$, fällt weg

mit $\boxed{\Theta = \int dm\, r_\perp^2 \overset{(10.26)}{=} \hat{\underline{\nu}} \cdot \underline{\underline{\Theta}}\, \hat{\underline{\nu}}}$ (12.16)

... Trägheitsmoment um die Achse $\hat{\underline{\nu}}$

⟶ (12.15) ⟶ (1)−(2) = 0

⟶ $(D^{(t)} - \Theta \dot{\omega})\, \delta\varphi = 0$

⟶ $\boxed{D^{(t)} = \Theta \underbrace{\dot{\omega}}_{\dot{\underline{L}} \cdot \hat{\underline{\nu}}}}$ (12.17)

$D^{(t)} = \underline{D} \cdot \hat{\underline{\nu}}$

also: Zwangsdrehmomente $\underline{D}^{(z)} \perp \hat{\underline{\nu}}$

wegen $\underline{L} \nparallel \hat{\underline{\nu}}$ tauchen hier nicht auf.

[vgl. Kap. 10.3.f): $\underline{D}^{(z)}$ durch Lagerkräfte

12.4 Langrangesche Gleichungen 1. Art

- d'Alembert $\longrightarrow$ DGln. für $\underline{r}_k$ & Zugang zu Zwangskräfte
- Es gilt: (1) $\sum_{k=1}^{N} (\underline{F}_k^{(t)} - m\ddot{\underline{r}}_k) \cdot \delta\underline{r}_k = 0$ (12.15)

  (2) $\sum_{k=1}^{N} \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \cdot \delta\underline{r}_k = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots Z$ (12.6)

  $\delta\underline{r}_k$ mit Komp. $\delta x_{k\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$

  also: von 3N Verrückungen $\delta x_{k\alpha}$ sind nur $f = 3N - Z$ unabhängig

- Methode der Lagrangesche Multiplikatoren λ_ν:

$$(1) + \sum_{\nu=1}^{Z} \lambda_\nu (2) = 0$$

beliebige Faktoren $\lambda_\nu(t)$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^{N} \underbrace{(\underline{F}_k^{(t)} - m\ddot{\underline{r}}_k + \sum_{\nu=1}^{Z} \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)})}_{\underline{V}_k \text{ mit Komp. } V_{k\alpha} \quad \alpha = 1,2,3} \cdot \delta\underline{r}_k = 0 \quad (12.18)$$

(i) Wähle für Z Verrückungen $\delta x_{k\alpha}$ die $\lambda_\nu(t)$ so, daß $V_{k\alpha} = 0$

(ii) die restlichen $3N - Z = f$ Verrückungen $\delta x_{\ell\beta}$ sind frei wählbar: $(12.18) = 0 \longrightarrow V_{\ell\beta} = 0$

$$\longrightarrow \boxed{m\ddot{\underline{r}}_k = \underline{F}_k^{(t)} + \sum_{\nu=1}^{Z} \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, N} \quad (12.19)$$

... Lagrangesche Gln. 1. Art

$$\& \quad \boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \cdot \dot{\underline{r}}_k = 0, \quad \nu = 1, \ldots, Z} \quad (12.20)$$

... Bindungsgln. [$\hat{=}$ (12.6) mit $\delta\underline{r}_k \to \dot{\underline{r}}_k$]

also: 3N + Z DGln. für 3N + Z Variable: $\underline{r}_k$, λ_ν

- <u>Lösungsweg:</u>
  (1) Bestimme Z Multiplikatoren λ_ν aus Z Gln. von (12.19)
  (2) Einsetzen der λ_ν in die restlichen $3N-Z$ Gln.
  & Z Gln von (12.20)
  $\longrightarrow$ $3N$ DGln für $\underline{r}_k$

- Zwangskräfte: vgl. (12.19) mit $m\ddot{\underline{r}}_k = \underline{F}_k^{(t)} + \underline{F}_k^{(z)}$ (12.1)

$$\longrightarrow \boxed{\underline{F}_k^{(z)} = \sum_{\nu=1}^{Z} \lambda_\nu \underline{\phi}_k^{(\nu)} \quad , k = 1, \ldots, N}$$

also: $\lambda_\nu(t) \longrightarrow \underline{F}_k^{(z)}$!

- <u>Bsp:</u> Seilmaschine von Atwood