

11. Harmonisch gekoppelte Massepunkte

11.2. Grundproblem

→ $\boxed{\ddot{\underline{x}} + \underline{\Omega} \underline{x} = 0} \quad (11.10)$

dynam. Matrix

Vektor aller Koordinaten der Massepunkte, relativ zum Potentialminimum

... 3-f gekoppelte harmonische Oszillatoren

allg. Lösung:

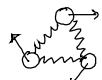
$\boxed{\underline{x} = \sum_{k=1}^6 a^{(k)} \underline{e}^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)})} \quad (11.16)$

$\underline{e}^{(k)}$ EV von $\underline{\Omega}$

$\omega^{(k)}$... EW von $\underline{\Omega}$

• Bemerkungen

(1) in (11.10) enthalten: 3 Translationen: $\underline{r}_v(t) = \underline{v}t + \underline{r}_{v0}$
3 Rotationen



$\boxed{\omega^{(k)} = 0, \quad k = 1 \dots 6}$

(2) Entartung: $\boxed{\omega^{(k)} = \omega^{(l)}, \quad k \neq l}$

Bsp: 2-fache Entartung → Lösungsraum:

Superposition aus: $\left[a_{\pm}^{(k)} \underline{e}^{(k)} + a_{\pm}^{(l)} \underline{e}^{(l)} \right] \cos \omega^{(k)} t$

- (i) zufällige Entartung
- (ii) aufgrund von Symmetrien

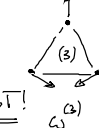
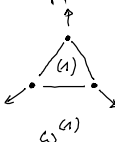
(3) Bsp:



3-zählige Symmetrie um $\odot$
[Drehung um 120° : Molekül geht in sich über]

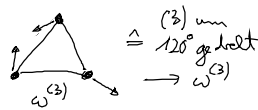
$3 = 9 - 6$ Eigenschwingungen
f. Rot./Trans.

Gruppenreine (GT) → [o.B.]



keine Schwerpunktsbewegung

Kombination ergibt z.B.:



Symmetrien & Gruppentheorie
→ Eigenmoden

• Normalkoordinaten:

$\{\underline{e}^{(1)} \dots \underline{e}^{(3N)}\}$... vollständige ONB in $\mathbb{R}^{3N}$

→ allg. Lsg.:

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{3N} q^{(k)}(t) \underline{e}^{(k)} \quad (11.13)$$

mit $q^{(k)}(t) = \underline{x} \cdot \underline{e}^{(k)}$
... Normalkoord.

• Dgl. für $q^{(k)}(t)$?

$$\underline{e}^{(k)} \cdot \ddot{\underline{x}} + \underline{\Omega} \underline{x} = 0 \quad (11.10)$$

mit (11.13): $\ddot{q}^{(k)} + \underline{e}^{(k)} \cdot \sum_L \underbrace{\underline{\Omega}}_{[\omega]_{3 \times 3}^{(L)}} q^{(L)}(t) = 0$

$$\underline{e}^{(k)} \cdot \underline{e}^{(L)} = \delta_{kL} \quad \boxed{\ddot{q}^{(k)} + [\omega^{(k)}]^2 q^{(k)} = 0} \quad (11.20) \quad k=1 \dots 3N$$

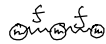
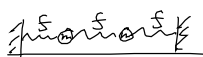
also: Eigenschwingungen

$\triangleq$ $3N$ entkoppelte harm. Oszillatoren
der Frequenz $\omega^{(k)}$

Lsg.: $\boxed{q^{(k)}(t) = a^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)})} \quad (11.21)$

[vgl. (11.15)]

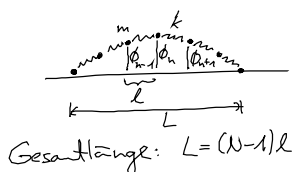
• Bsp:



andere Bsp: Atome

11.4 Schwingende Saiten: Wellengleichung

• Modell:



N Massepunkte, harmonisch gekoppelt mit nächsten Nachbarn

ϕ_n ... transversale Auslenkung des n -ten Massepunktes

- Newton für n -te Masse, pft:

$$m \ddot{\phi}_n = -f(\phi_n - \phi_{n-1}) - f(\phi_n - \phi_{n+1}) \quad (11.22)$$

ham.
Nath

f? Saite vorgeplant:

... $\overset{\text{Leberant}}{\underset{l_0}{\bullet}} \xrightarrow{\text{Spannung}} \overset{\text{Leberant}}{\underset{l}{\bullet}} \xrightarrow{\text{o.B.}} f_{\mathbb{Z}}(1 - \frac{l_0}{l})!!$
kleine transv. Ausb. (1.2)

- Kontinuumstübergang zur Masse (siehe Seite: ...)

$$\ell = \Delta \times \overset{\cup}{\longrightarrow} 0, N \rightarrow \infty$$

$$\phi_n(t) \longrightarrow \phi_{\frac{x_i}{t}}(t)$$

↑
discret. Index

Cent. Arts Board.

$$\text{also: } \phi_{n \pm 1} - \phi_n \rightarrow \phi(x \pm \Delta x) - \phi(x) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \pm \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots$$

→ r. S. von (11.22): $\oint \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 \quad (1)$

$$L.S. \quad \leftarrow \quad m \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2)$$

Summe Koef: $\frac{\Delta x}{m} \frac{f \Delta x}{\Delta x_{123}} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c^2}{c} = \frac{f \Delta x}{\Delta x_{123}} = \frac{\text{Zugkraft}}{\text{Linien-Masse-dichte}} \quad (11.24a)$

$$\xrightarrow{(1)=(2)} \boxed{\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \phi(x,t) = 0} \quad (11.24)$$

... Wellengleichung für "Feldamplitude" ϕ

[N Dgl. (11.22) $\rightarrow$ partielle Dgl.]

- allg. Lsg. der Wellgl.:

neue Variablen:

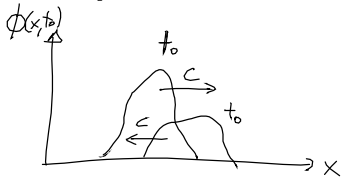
$$\begin{aligned} x - ct &= \xi \\ x + ct &= \eta \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (M.25)$$

Berechne: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (11.26)$

... Welcher operiert aus (1.24)

$$(11.24) \xrightarrow[\text{variable}]{\text{new}} \boxed{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \phi(y, z) = 0} \quad (11.27)$$

allg. Lösung: $\phi(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) = \underbrace{f(x-ct)} + \underbrace{g(x+ct)}$



laufe "forminvariant"
nach rechts / links
mit Geschw c !
 $\hat{=}$ keine Dispersion

- Normalschwingungen:
Ansatz: ebene Welle $\Phi(x,t) = a e^{i(kx - \omega t)}$ [komplex. Darstellung]

$$\left. \begin{array}{l} \omega \dots \text{Kreisfrequenz} \\ k \dots \text{Wellenzahl} \end{array} \right\} \quad (M.28)$$

in (M.24) $\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right)\Phi = 0 \rightarrow \boxed{\omega = \pm ck} \quad (M.29)$
 ... Dispersionsrelation!!
 $\omega = \omega(k)$

Normalschwingung:
 (M.29) $\rightarrow$ in ebener Welle $\left. \begin{array}{l} \Phi_k(x,t) \sim e^{i k(x-ct)} \dots \text{nach rechts laufende Welle} \\ e^{i k(x+ct)} \dots \text{" " links laufende Welle} \end{array} \right\} \quad (M.30)$

„Wellenzahl k ersetzt diskreten Index $(k) = 1 \dots 3N$ von Kap. M.3“

- allg. Lsg. der Wellen gl.:

Superpositionsprinzip:

$$\Phi(x,t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{i k(x-ct)}}_{\text{Fourier-Integral-}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} b(k) e^{i k(x+ct)}}_{\text{Darstellung eines nach rechts / links laufende Wellenpakets}} \quad (M.31)$$

Fourier-Integral-
 Darstellung eines nach rechts / links
 laufende Wellenpakets $f(x-ct)$ $g(x+ct)$

$\Phi(x,t)$ reell $\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a(-k) = a^*(k) \\ b(-k) = b^*(k) \end{array}} \quad (M.22)$

- Wellen mit Dispersion: $\boxed{c = c(k)}$

Phasengeschw. einer Welle: $c = \frac{\omega(k)}{k} \quad (M.33)$

Annahme $c = c(k)$ in Wellenpaket
 $\rightarrow$ Paket zerfliebt



Bsp: a) EM-Wellen im Medium, Glasfaser!

$\boxed{c = \frac{c_0}{n(\omega)}}$
 [Brechungsindex]

b) QM: Welle eines freien Teilchens

o.B. $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \rightarrow c = \frac{\hbar k}{2m}$

- eingependete Seite: 2 Übungen