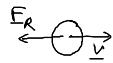


3.2 Reibungs-/dissipative Kräfte (kein $U(r)$)

a) Haft- und Gleitreibung

b) Stokes'sche Reibung: in Flüssigkeiten/Gasen ohne Turbulenz

$$\underline{F_R = -\beta \underline{v} + O(v^2)} \quad (3.19)$$



Kugel: $\beta = 6\pi\eta a$
 Diskontinuität der Viskosität an der Kugeloberfläche
 Kugelradius

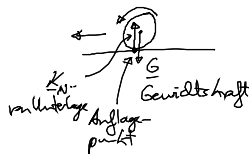
c) Newton'sche Reibung: mit Turbulenz

$$\underline{F_R = -\rho v^2 \frac{\underline{v}}{v} + O(v^3)} \quad (3.20)$$

Bsp: Auto, c_w -Wert, $c_w = \frac{\gamma}{\rho A v^2}$
 γ : Widerstandskraft
 ρ : Dichte des Fluids
 A : Querschnittsfläche

a)-c) 2. Teil phänomenologische Gesetze, aber auch herleitbar für Spezialfälle

d) Rollreibung



$\underline{K_N}, \underline{G} \dots$ nicht auf einer Linie wegen Deformation des Rades
 $\rightarrow$ bremsendes Drehmoment

3.3 Scheinkräfte

• in Nicht-IS [später]: $m\underline{a} = \underline{F} + \underline{F_{\text{Schein}}}$
 wegen Nicht-IS, damit Newton II formel gilt, keine wirklichen physikal. Kräfte, Auswirkung real:

Bsp.: auf fahrendes Auto: "Kraft", die Fahrer in Sessel drückt
 Karussell: Zentrifugalkraft, die Person nach außen drückt
 Erde: Corioliskraft

4. Ein dimensionale/lineare Bewegung

4.1 Allg. Problem

- 2. Newt. Axiom: $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ (4.1) ... gewöhnliche Dgl. 2. Ordnung

→ $x(t)$ mit 2 Integrationskonstanten

a) Randbed: $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$

β) Anfangsbed: $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$

Lesen

Materialien: Bemerkungen - DGL.

4.2 Bewegung im konservativen Kraftfeld

- grad → $\frac{d}{dx}$: $F(x) = -\frac{d}{dx} U(x) = -U'(x) \rightarrow m\ddot{x} = -U'(x)$ (4.2)
pot. Energie in 1D

- Lösungsmethoden
 - a) spezieller Ansatz („Raten“)
 - β) 1. Integral der Bew. gl. (4.2) → EES
 - 2. Integral: „Separation der Variablen“
 → Bahnkurve

- zu β): 1. Integral: $\dot{x} \cdot (4.2) \xrightarrow[\text{regel}]{\text{Kette}} \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \dot{x}^2 = -\frac{d}{dt} U(x(t))$

$$\rightarrow \text{EES: } \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) = E \quad (4.3)$$

Gesamtenergie
1. Integrationsvariable

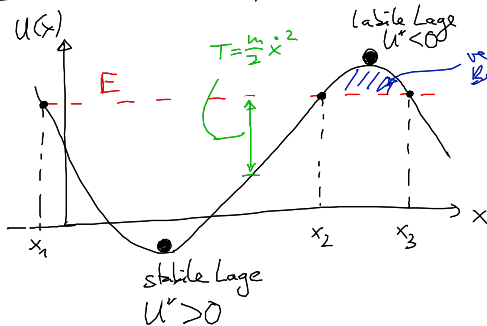
2. Integral:
 mit $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ (4.3) → $\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E-U)} \rightarrow dt = \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$

$$\int_{t_0}^t dt \rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}} \quad (4.4) \quad x_0 = x(t_0)$$

... 2. Integr. variable

$$\rightarrow x = x(t - t_0, x_0, E) \quad (4.5) \quad [\text{i. f. o. B. l. A. } t_0 = 0]$$

- qualitative Diskussion: „Teilchen bewegt sich in Potential und schau“



- x_1, x_2, x_3 ... Umkehrpunkte ($\dot{x} = 0$)

- periodische Bew.:
 $x_1 \leq x \leq x_2$

Periodendauer:

$$T_{0(t \neq 0)} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}} \quad (4.6)$$

a) Senkrechter Wurf bei konst. Geschwindigkeit:



$$m\ddot{x} = -mg$$

$$\rightarrow \dot{x}(t) = -gt + v_0 \quad (4.7)$$

$$\rightarrow x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \quad (4.8)$$

• Steighöhe h von $x_0=0$: Umkehrpt: $\dot{x}=0 \xrightarrow{(4.7)} t = \frac{v_0}{g}$

$$\rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}}$$

b) Senkrechter Wurf im Gravitationspotential:



$$m\ddot{r} \stackrel{(2.10)}{=} -\gamma \frac{mM}{r^2} = -\gamma \frac{M}{R^2} - mg \frac{R^2}{r^2} \quad (4.10)$$

1. Integral: $\frac{m}{2} \dot{r}^2 - \underbrace{mg \frac{R^2}{r}}_{U(r) \dots \text{pot. Energie im Grav.feld}} = E \quad (4.11)$

2. Integral: $(\dot{r}=0)_{r(t)}$

$$t = \int_R^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E + \underbrace{mg \frac{R^2}{r}}_{-U(r)})}} \quad (4.12)$$

(von Erde bei $t=0$)

• parabolische/2. kosmische/
Fluchtgeschwindigkeit v_0 :

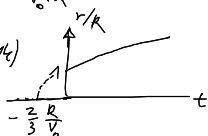
$$\boxed{E=0 \triangleq v(r \rightarrow \infty)=0}$$

aus EES mit $r=R$: $\boxed{v_0 = \dot{r}(0) \stackrel{E=0}{=} \sqrt{2gR}} \quad (4.13)$

Erde: $R=6370 \text{ km}$

aus (4.12)

$$\stackrel{(4.13)}{t=0} \int_R^{r(t)} \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{r}{R}} dr = \frac{2}{3} \frac{1}{v_0 \sqrt{R}} r^{3/2} \Big|_R^{r(t)} = \frac{2}{3} \frac{1}{v_0 \sqrt{R}} [r(t)^{3/2} - R^{3/2}]$$

$$\rightarrow \boxed{r(t) = R \left[1 + \frac{2}{3} \frac{v_0}{R} t \right]^{2/3}} \quad (4.14)$$


mit $\dot{r}(t) = \frac{v_0}{[1 + \frac{2}{3} \frac{v_0}{R} t]^{1/3}} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$

• a) aus b): $\frac{2}{3} \frac{v_0}{R} t \ll 1$: Taylorentw. von (4.14) mit (4.13)

$$\boxed{r(t) = R + \underbrace{v_0 t}_{(4.8)} - \frac{g}{2} t^2 + \underbrace{\frac{1}{6} \frac{v_0^3}{R^2} t^3 + \dots}_{\text{Korrektur}}} \quad (4.15)$$

$$\left[(1+x)^{2/3} \approx 1 + \frac{2}{3}x \right]$$

$$\left[(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \right]$$

4.3 Bewegung im geschwindigkeitsabh. Kraftfeld

• Löse: $m\ddot{x} = F(x) \xrightarrow{\dot{x}=v} m\dot{v} = F(v) \dots$ Dgl 1. Ordg $\frac{dv}{dt}$

- Trennung der Variablen: $\dot{v} = \frac{dv}{dt} \rightarrow t = m \int_{v_0=v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{F(v)} \rightarrow v(t) \quad (4.16)$

- 2. Integral: $x(t) = \int_0^t v(t') dt' + x_0$

$x_0, v_0 \dots$ Integrationsvariable

• in der Regel: $t \rightarrow \infty$: stationäre Bewegung: $m \dot{v} = F(v) = 0$
 $\rightarrow v_\infty \dots$ Grenzgeschw.

a) Freier Fall mit Stokes'scher Reibung



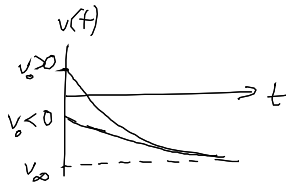
• $m \dot{v} = -mg - \beta v$ (4.17) $\beta = 6\pi\eta a \dots$ Kugel

• $F(v) = 0 \rightarrow v_\infty = -\frac{mg}{\beta} < 0$

• $t = -m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{mg + \beta v} = -\frac{m}{\beta} \int_{\frac{mg}{\beta} + v_0}^{\frac{mg}{\beta} + v(t)} \frac{dv}{v} = -\frac{m}{\beta} \ln \frac{-v_\infty + v(t)}{-v_\infty + v_0}$

$\rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln \frac{-v_\infty + v(t)}{-v_\infty + v_0} / e^{\dots}$

$v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty) e^{-t/\tau}$ (4.18)
 $\tau = \frac{m}{\beta} \dots$ Relaxationszeit



! $v(t) \rightarrow v_\infty, t \rightarrow \infty$

Bsp: $\eta(\text{H}_2\text{O}) = 0.001 \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$

$a = 10^{-6} \text{ m}$
 $\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ } $m = \rho \frac{4\pi}{3} a^3 \approx 4 \cdot 10^{-15} \text{ kg}$

$\rightarrow \tau = \frac{m}{6\pi\eta a} \approx 10^{-7} \text{ s} !$

• Anwendung: mikroskop. Modell für Ohm'sches Gesetz:

$-mg \rightarrow eE$... angelegte Feld beschl. e^- Ladungsdichte (4.18) $v_\infty = \frac{eE}{\beta}$ (4.20)

elektr. Stromdichte: $j = n e v_\infty = \sigma E$... Ohm'sches Gesetz

$\sigma = \frac{n e^2}{\beta} = \frac{n e^2 \tau}{m}$ (4.21) ... spezifische Leitfähigkeit

... Mechanismus für $\tau = \frac{m}{\beta}$

... Reibung β durch Stöße von e^- mit Phononen (Gitterschwingungen) & Verunreinigungen im Metall

$\rightarrow \tau \dots$ mittlere stoßfreie Zeit

b) Freier Fall mit Newton'scher Reibung (Luftwiderstand)

• Löse: $m \dot{v} = -mg + \gamma v^2 \rightarrow$ Übungen

4.4 Reine zeitabhängige Kraft

• Löse: $m\ddot{x} = F(t)$ 1. Integral $\dot{x}(t) - v_0 = \frac{1}{m} \int_0^t F(t') dt'$ (4.22)

2. Integral $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} F(t'') dt''$ (4.23)

• Bsp: $F(t) = A \cos \omega t$

o.B. $\rightarrow x = \underbrace{x_0 + v_0 t}_{\text{gleichf. Beweg.}} + \frac{A}{m\omega^2} (1 - \underbrace{\cos \omega t}_{\text{in Gegenphase zur erregenden Kraft}})$

