

c) Die Diracsche „ δ -Funktion“

• Grundeigenschaft: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x') f(x') dx' = f(x) \quad (S.16)$

Satz: $\delta(x-x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(x-x')$

wobei 1. $\delta_{\varepsilon}(x-x') = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x-x'}{\varepsilon}\right)$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x-x') \frac{dx-x'}{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi = 1$

3. „...“: in (S.16) ext $\int \dots$, dann $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ (S.17)

• Bsp: (iv) $\delta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{\sin \frac{x}{\varepsilon}}{x/\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} dq e^{iqx} \quad (S.51)$

• Eigenschaften der δ -Funktion:

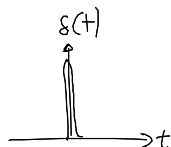
(i) $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (S.52)$

(ii) $\int_a^b \delta(x-x') f(x') dx' = \begin{cases} f(x), & a < x < b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (S.53)$

(iii) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (S.54)$

$\delta(-x) = \delta(x)$... gerade Fkt (S.55)

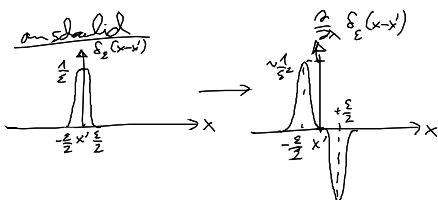
(iv) $\delta(x) \stackrel{(S.51)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iqx} \frac{dq}{2\pi} \quad (S.56)$
... Fourier-Darstellung



Produktregel

(v) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x') f(x') dx' = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x') \right] f(x') dx' \stackrel{\downarrow}{=} f'(x)$

... Ableiten

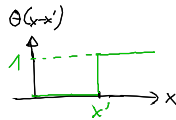


$\dots \rightarrow \frac{f(x+\frac{\varepsilon}{2}) - f(x-\frac{\varepsilon}{2})}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f'(x)$

Beweis: (ii)/(v) -- Übung

• Stufenfunktion:

$$(i) \quad \Theta(x-x') = \begin{cases} 1, & x-x' > 0 \\ 0, & x-x' < 0 \end{cases} \quad (S.58)$$



$$(ii) \quad \Theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x') dx' \quad (S.59)$$

$$\rightarrow \delta(x) = \frac{d}{dx} \Theta(x) \quad (S.60)$$

d) Der Formalismus der linearen Antwort II

$$x_{\text{part}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_c(t-t') F(t') dt' \quad (S.42)$$

$$\cdot \quad \varepsilon_s \text{ gilt: } \hat{L}(t) G_c(t-t') = \underbrace{\delta(t-t')}_{\delta\text{-Kraft}}, \quad \hat{L}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \quad (S.61)$$

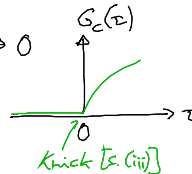
$\int \delta(t-t') dt' = 1 \dots \delta\text{-Kraftschoß}$

• Bestimmung der Green'schen Fkt. aus Stetigkeits- und Sprungbed.: $\tau = t - t'$

$$(i) \text{ Kausalität: } G_c(\tau) = 0, \tau < 0$$

$$(ii) \text{ Stetigkeit: } G_c(\varepsilon) - \underbrace{G_c(-\varepsilon)}_0 = 0, \varepsilon \rightarrow 0$$

$G_c(0) = 0$



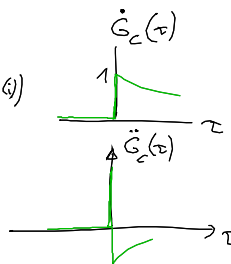
(iii) Sprungbeding:

$$(S.61) \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt \left[\ddot{G}_c(t) + 2\gamma \dot{G}_c(t) + \omega_0^2 G_c(t) - \delta(t) \right] = 0$$

$$2\gamma [\underbrace{G_c(\varepsilon) - G_c(-\varepsilon)}_{\rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{= 1}_{(S. (ii))}] \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\dot{G}_c(\varepsilon) - \dot{G}_c(-\varepsilon) \underbrace{= 0}_{(S. (i))}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \boxed{\dot{G}_c(+0) = 1}$$



vgl. $\delta\text{-Kraftschoß}$: $1 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{F}{m} dt \stackrel{F=p}{=} \frac{1}{m} [p(\varepsilon) - \underbrace{p(-\varepsilon)}_0]$

$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \boxed{1 = v(0) = \dot{x}(0)}$

(iv) $\tau > 0$: $G_c(\tau)$ löst homog. DGL:

kausale Grönsele Fkt.

(5.52)

$$\xrightarrow{(i)-(iv)} G_c(t-t') = \underbrace{\Theta(t-t')}_{(i)} \underbrace{\frac{1}{\omega_d}}_{(iii)} \underbrace{e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_d(t-t')]}_{(ii),(iv): (5.20), \varphi = \frac{\pi}{2}}$$

• Bemerkungen:

(i) δ -Kraft $\delta(t-t') \stackrel{(5.52)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} d\omega$... kontinuierliche Überlagerung von harm. Kräfte der Stärke $\frac{1}{2\pi}$

$\rightarrow$ Antwort $\chi(\omega) \frac{1}{2\pi} e^{i\omega(t-t')}$ (s. vgl. (5.30))

Linearität der DGL:

Antwort auf $\delta(t-t')$
Überlagere (*)

$$G_c(t-t') = \int \chi(\omega) e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi} \equiv \chi(t-t') \quad (5.53)$$

... Fourier-Integral-Darstellung von $G_c(t-t')$

dynamische Suszeptibilität $\chi(\omega) \equiv$

Fourier-Transformierte von $G_c(t-t')$

$$G_c(\omega) = \chi(\omega) \quad (5.54)$$

NB: Berechne (5.53) durch Integration im Komplexen [Mathe, später]

Einzelb: Fouriertransformation (FT)

Vgl. Vektor: $\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i$ mit $a_i = \underline{e}_i \cdot \underline{a}$, $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$

hier: Basis für $f(t)$?

definiere: Fouriertrafo von $f(t)$:

$$\hat{f}(\omega) \equiv f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

dam gilt: (o.B.) $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$

Faltungssatz der FT:

$$f(\omega) g(\omega) \xrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') g(t') dt'$$

(ii) allgemeine Kraft:

$$\hat{L}(t) \underline{x}(t) = \tilde{F}(t) \leftarrow \int \underline{x}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\overrightarrow{\hat{x}(t)e^{i\omega t}} = \chi^{-1}(\omega)e^{i\omega t} \quad \left| \int \chi^{-1}(\omega)x(\omega)e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int \tilde{F}(\omega)e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right.$$

$$\longrightarrow \boxed{\chi^{-1}(\omega)x(\omega) = \tilde{F}(\omega)} \quad \dots \text{vgl. (5.30)}$$

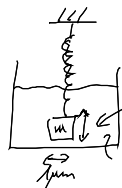
$$\longrightarrow x(\omega) = \chi(\omega) \tilde{F}(\omega) \xrightarrow[\text{der FT}]{\text{Faltungssatz}}$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\chi(t-t')}_{G(t-t')} \tilde{F}(t') dt'}$$

vgl. (5.42)

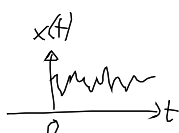
(iii) Ansicht: Fluktuation - Dissipation - Theorem

Exptl.



Zitterbewegung aufgrund therm. Stöße der Flüssigkeitsmoleküle

charakteristische Zitterbewegung



$$C(t) = \langle x(t) x(0) \rangle \quad \dots \text{zeitl. Autokorrelations fkt. der Auslenkung } x(t)$$

↑
Mittelwert Ensemble

Führe ein: $C(\omega) = \int C(t) e^{-i\omega t} dt$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{C(\omega) = -\frac{2}{m} \frac{k_B T}{\omega} \chi''(\omega)} \quad (5.65)$$

Fluktuation

Absorption/
Dissipation

... Fluktuation -
Dissipation -
Theorem