

13.3 Euler-Lagrange'sche Gln. 2. Art

Herleitung aus Hamilton'schem Prinzip

a) cons. Kräfte/general. Potentiale:

$$L = T - U \rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dots) dt$$

$$\rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \frac{\delta S}{\delta q_j} \delta q_j(t) dt = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (13.3)$$

b) nicht konservative Kräfte

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1 \dots f \right] \quad (12.26)$$

c) Potentialkräfte mit anholonomem Zwangsbed.:

→ Folie

13.4 generalisierte Impulse

• Def:

$$\left[p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \quad (13.23)$$

... generalisierter
kanonische
zu q_j konjugierte } Impuls

• Bsp:

(i) Teilchen im 3D Potential: $q_j = x_j, j = 1, 2, 3 \dots$ kartesische Koord.

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \sum_j \dot{x}_j^2 \\ U &= U(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} L = T - U \rightarrow \boxed{p_j = m \dot{x}_j} \quad (13.24)$$

(ii) Teilchen im em. Feld: $L = T - W = T - q\varphi + q \vec{A}_i \dot{x}_i \quad (13.26)$
Ladg. φ skalares/Vektorpotential $\vec{A}_i$

$$\xrightarrow{(13.23)} \boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + q A_i} \quad (13.25)$$

mechan. Impuls Impuls des mitgeführten em. Feldes

NB: viele Teilchen mit holoanomen Zwangsbed.:

$$\text{mit } \dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$x_i = x_i(q_1, \dots, q_s, t)$
 $1 \dots 3N, x_1, x_2, x_3 \dots$ 1. Teil.
 $x_4, x_5, x_6 \dots$ 2. Teil.

in (13.25)
 $W = q(\varphi - \sum_i A_i \dot{x}_i)$

$$W = q\varphi - q \sum_j q_j \dot{q}_j + q \sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$A_1, A_2, A_3 \dots$ 1. Teil.
 $A_4, A_5, A_6 \dots$ 2. Teil.
 $\vdots$
 $= 0$ für stationäre Zwangsbed. (13.26)

... general. Vektorpotential

(iii) ebene Bewegung: $x, y \rightarrow s, \varphi$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2)$$

$x = s \cos \varphi$
 $y = s \sin \varphi$

$$\left. \begin{array}{l} \text{radialer Impuls: } p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} \\ \text{Drehimpuls: } p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m s^2 \dot{\varphi} = m s^2 \omega \end{array} \right\} (13.27)$$

↑
azimutale Geschw.

13.5 Symmetrien & Erhaltungssätze

- Lagrange-Gln.: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, j = 1, \dots, f$
 mit $L = T - U$.. kons. System

$\Rightarrow f$ D.Gln. 2. Ord. in t

$\rightarrow$ Lsg. mit $2f$ Integ. konst.

nicht immer explizit angebar! [mit Fkt. $q_j = q_j(t)$]
 (" " " integrierbar)

- Notwendig: hilfreiche Aussagen über System möglich

$\rightarrow$

Noether Theorem:
 Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikal. Systems gehört eine Erhaltungsgröße und umgekehrt.

kont. Symmetrie = kont. Transformation, die Verhalten des physikal. Systems nicht verändert.

Erhaltungsgröße = 1. Integral der Bewegung:

$$E = E(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \text{konst.} \quad \forall t$$

• Untersucht anhand von $L = T - U$

a) Impulserhaltung

• Def: 2y. klinele Koord.: $\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad (13.28)$

... Symmetrie von L
bzgl. Verschiebung q_j

• (13.28) in (13.3) $\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j = 0!$

$$\rightarrow \boxed{p_j = \text{konst.}}$$

... Impulserhaltung $\hat{=}$
Konstante der Bewegung

• Bsp: (i) freies Teilchen: $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{konst.}$

Impulserhaltung $\leftrightarrow$ „Translationsinvarianz des Raumes“
Homogenität

(ii) Teilchen im Zentralpotential $U = U(r)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst.}$$

Drehimpulserhaltung
 $\leftrightarrow$ Drehinvarianz des Raumes
Isotropie

(iii) Vielteilchensysteme:

- Schwerpunkts Koord. $R_j = q_j \hat{=}$ Verschiebung des ges. Systems

$$\text{falls } \frac{\partial L}{\partial R_j} = 0 \rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_j} = \text{konst.}$$

... Erhaltung des Gesamtimpulses
[Bew: Goldstein/Wolking]

- Drehung des Gesamtsystems um $\varphi = q_j$ um Achse $\hat{z}$:

$$\text{falls: } \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst.}$$

... Erhaltung des Gesamtdrehimpulses [Bew: Goldstein]

b) $\boxed{\text{Energieerhaltung: } \leftrightarrow \text{„Invarianz unter Zeittranslation“}}$

$$\begin{aligned} \text{• also: } \boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0} & \xrightarrow{(13.23)} \frac{d}{dt} L = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \\ & = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \quad \text{Ganze} \end{aligned}$$

$$\rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left[L - \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \dot{q}_j \right]$$

$$\rightarrow \boxed{H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = \text{konst.}} \quad (13.30)$$

... Hamilton fkt.!

• Bedeutung von H:

mit $L = T - U \xrightarrow{(13.30)} p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad H = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + U \quad (13.31)$

- kinet. Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2$ mit $\dot{r}_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}$
 $r_i = r_i(q_j, t)$

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^f b_j \dot{q}_j + c \\ \text{mit } a_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = a_{kj} \\ b_j &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial t} \\ c &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}} \quad (13.32)$$

- skleronome Zwangsbed.:

$\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0! \xrightarrow[c_j=0]{b_j=0} \boxed{T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k} \quad (13.33)$
 ... homog. Fkt. 2. Ordnung in $\dot{q}_j$

Term aus (13.31) $\rightarrow \boxed{\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T} \quad (13.34)$
 $\left(\begin{smallmatrix} a_{jk} \\ = a_{kj} \end{smallmatrix} \right) = \cancel{\frac{1}{2}} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$

mit (13.34) in (13.31): $H = 2T - T + U$

$\rightarrow \boxed{H = T + U} \quad (13.35)$
 ... Gesamtenergie

- Bem.: (i) gilt für konservative Systeme
 mit skleronomen, holonomen Zwangsbed.

(ii) z.B.: gilt auch für generalisierte
 Potentiale: $W = q\varphi - q \sum_i A_i \dot{x}_i \quad (12.36)$
 aber: $H = T + q\varphi$

d) Eid invarianz L :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Invarianz von } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (*) \\ \text{unter Eichtransformation: } L \rightarrow L + \frac{d}{dt} f(\{q_j\}, t) \end{array} \right\} (13.36)$$

wobei $f(\dots)$ beliebige Fkt. ist

Beweis: "Übung"

- (i) Setze in (*) ein
 - (ii) $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt + f(t_2) - f(t_1)$
- $\delta S = 0!$

→ L selber hat keine „physikal.“ Bedeutung