

5.3 Harmonischer Oszillator mit eingepprägter Kraft (erzwungene Schwingung)

a) harmonische Kraft:

$$\boxed{A_\omega = \chi(\omega) \frac{F_0}{m}} \quad (5.30)$$

mit $\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$

... dynamische Suszeptibilität

$$\boxed{\chi'(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad \chi''(\omega) = -\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} < 0} \quad (5.33)$$

• Näherung: $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$
 (5.30) $\rightarrow \chi(\Delta\omega) \approx -\frac{1}{2\omega_0(\Delta\omega - i\gamma)}$

• Leistungsbilanz:

$$(2.25) \quad \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2}_{\text{mechan. Energie } E_{\text{mech}}} \right] = F_{\text{diss}} \dot{x} = \underbrace{-\alpha \dot{x}^2}_{\text{Reibungs- / Verlustleistung}} + \underbrace{F(t) \cdot \dot{x}}_{\text{Leistung der äußeren Kraft}} \quad (5.37)$$

• eingeschwungener Zustand: $x(t) = x_{\text{part}}(t)$

$$\frac{d}{dt} \langle E_{\text{mech}} \rangle = 0 \xrightarrow{(5.37)} \alpha \langle \dot{x}^2 \rangle = \langle F(t) \cdot \dot{x} \rangle$$

„Dissipation“ = „Absorption“

$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt$

gemittelte dissipierte Energie pro Zeit

$$\langle N(\omega) \rangle = \underbrace{\alpha}_{2\gamma m} \langle \dot{x}^2 \rangle \stackrel{(5.33)}{=} \underbrace{2\gamma m \chi(\omega)^2 \frac{F_0^2}{2m}}_{-\chi''(\omega)/2\gamma\omega} \underbrace{\langle \sin^2(\omega t - \delta(\omega)) \rangle}_{\frac{1}{2}}$$

[S. 5.33]

$$\boxed{\langle N(\omega) \rangle = -\frac{\omega}{2m} F_0^2 \chi''(\omega)} \quad (5.38)$$

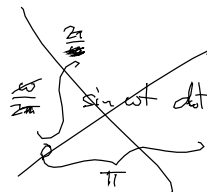
... absorbierte = dissipierte Leistung ist bestimmt durch $\chi''(\omega)$

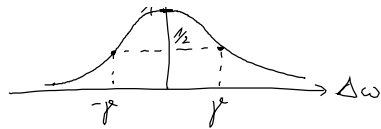
• Näherung: $\Delta\omega \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$:

$$\chi''(\omega) \approx -\frac{1}{2\omega_0} \frac{\gamma^2}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2} \quad (5.36)$$

$$(5.38) \quad \omega \approx \omega_0 \rightarrow \boxed{\langle N(\omega) \rangle \approx \frac{F_0^2}{4m} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + (\frac{\Delta\omega}{\gamma})^2}} \quad (5.39)$$

$\uparrow \frac{\langle N(\omega) \rangle}{F_0^2/(4m\gamma)}$





b) Der Formalismus der linearen Antwort I (Methode der Green'schen Fkt.)

- dynamische Eigenschaften eines Systems
äußerer Stimulus/erregende Kraft $\rightarrow$ Reaktion/Antwort

Bsp: $A_\omega = \chi(\omega) \frac{F_\omega}{m}$... "linear"

- Ziel: „allgemeinste lineare Antwort“ (für beliebiges $F(t)$)
- Bsp: harm. Oszillator: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \tilde{F}(t) = \frac{F(t)}{m}$ (S.40)

beliebige Kraft $\tilde{F}(t)$ $\xrightarrow{\text{„allg. lineare Antw.“}}$ $x_{\text{part}}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') \tilde{F}(t') dt'$ (S.41)
(bzw. $I(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{F}(t') dt'$... Kraftstoß) „Faltung“

(i) $\int_{-\infty}^t \dots$ Kausalitätsprinzip („Wirkung nach Ursache“)

(ii) $G(t-t')$... „Green'sche Funktion“

• Folgere ein: $G_c(t-t') = \begin{cases} G(t-t'), & t \geq t' \\ 0, & t < t' \end{cases}$... „kausale Green'sche Fkt.“

(S.41) $\rightarrow$ $x_{\text{part}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_c(t-t') \tilde{F}(t') dt'$ (S.42)

- Bestimmungsgl. für $G_c(t-t')$:

(S.42) in (S.40) $\tilde{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right]}_{\text{Differentialoperator } \hat{L}(t)} G_c(t-t') \tilde{F}(t') dt'$ (S.43)

$\rightarrow$ formal: $\underbrace{\hat{L}(t)}_{= \text{„1“} \dots \text{Eins-Operator}} G \tilde{F} = \tilde{F}$

[vgl. $\underbrace{A}_{=1} v = v$ bzw. $A_{ij} v_j = v_i \rightarrow [A]_{ij} = \delta_{ij}$]

hier: „Zeitraum“: Folge ein: „ δ -Funktion“ (Distribution)

so daß: $\tilde{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t-t')}_{1\text{-Operator im Zeitraum: } \delta(t-t') \text{ stark gepackt bei } t=t'} \tilde{F}(t') dt'$ (S.44)

vgl. mit (S.43) $\hat{L}(t) G_c(t-t') = \delta(t-t')$ (S.45) $[\delta_{ij} = 1]$

c) Die Diracsche „ δ -Funktion“

• Grundeigenschaft: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x') f(x') dx' = f(x)$ (S.16)

$\delta(x-x')$... „1-Operator im Raum der Fktn $f(x)$ “

[vgl: $a_i = \sum_j \delta_{ij} a_j$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

hier: $\sum_j \delta_{ij} \rightarrow \int \delta(x-x') \dots dx$ ^{Int. Index}

• „ δ -Fkt.“ als Grenzfalle stetiger Fktn:

Satz: $\delta(x-x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(x-x')$

wobei

1. $\delta_{\varepsilon}(x-x') = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x-x'}{\varepsilon}\right)$ „gutartig“
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x-x') dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi = 1$
3. „...“: in (S.16) erst $\int \dots$, dann $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$

(S.17)

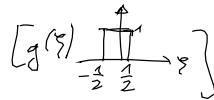
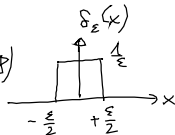
(S.17) $\rightarrow$ (S.16)? Bew:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta_{\varepsilon}(x-x')}_{\frac{1}{\varepsilon} g(\xi)} f(x') dx' \stackrel{x-x'=\xi}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(\xi) f(x-\varepsilon\xi)}_{\text{unverändert}} d\xi \rightarrow \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dots$$

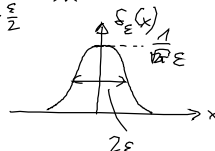
$$= f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi = f(x) \text{ qed}$$

$\rightarrow$ i.f. Rechne mit $\delta(x-x')$ ohne $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$

• Bsp: (i) $\delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{für } |x| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ (S.18)



(ii) $\delta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$... Gauß fkt (S.19) (Glocken-Kurve)



(iii) $\delta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{1}{1+(\frac{x}{\varepsilon})^2}$ (S.20) Lorentz-Kurve

(iv) $\delta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{\sin \frac{x}{\varepsilon}}{x/\varepsilon} \stackrel{\text{a.B.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} dq e^{iqx}$... Spaltbeugungsfkt der Optik

