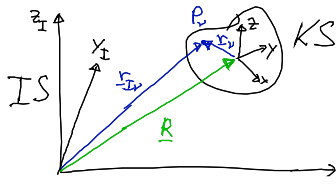


10.1 Kinematik

a) Koord. system



Euler's Satz: $\dot{\mathbf{r}}_{Iv}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) + \underline{\omega}(t) \times \mathbf{r}_v(t) \quad \forall P_v \quad (10.4)$
 $\uparrow$
 unabh. von Wahl von $\underline{R}$

10.2. Dynamik des starren Körpers (I) & Trägheitstensor

a) Dynam. Grundgleichungen:

• innere Kräfte: $\underline{F}^{(i)} = \sum_{\mu} \mathbf{F}_{\mu} = 0 \quad (8.6)$
 $\underline{D}^{(i)} = \sum_{\mu} \mathbf{r}_{Iv} \times \mathbf{F}_{\mu} = 0 \quad (8.7)$

(1) Gesamtmasse: $M = \sum_{\nu} m_{\nu} \quad (10.10)$

(2) " Impuls: $\underline{P} = \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{Iv} \quad (10.11)$

(3) " Drehimpuls: $\underline{L}_I = \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{r}_{Iv} \times \dot{\mathbf{r}}_{Iv} \quad (10.12)$

• Bewegungsgln.:

$\dot{\underline{P}} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}^{(a)} = \underline{F}^{(a)} \quad (10.13) \quad [(8.8)]$

$\dot{\underline{L}}_I = \sum_{\nu} \mathbf{r}_{Iv} \times \mathbf{F}_{\nu}^{(a)} = \sum_{\nu} \underline{D}_{\nu}^{(a)} = \underline{D}^{(a)} \quad (10.14) \quad [(8.14)]$

... 6 Dgl., die die Dynamik des starren Körpers ($f=6$) eindeutig bestimmen

• Gleichgewichtszust.: $\left. \begin{array}{l} \underline{F}^{(a)} = 0 \\ \underline{D}^{(a)} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{P}} = 0 \\ \dot{\underline{L}}_I = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{Grundlage der Statik}$

• im folgenden: 2 Fälle:

- (i) Aufpkt. $\underline{R}$ = Schwerpkt. $\underline{R}_s = \frac{\sum m_{\nu} \mathbf{r}_{Iv}}{M} \quad (10.15)$
 Bsp: Erde, frei fallender Kreisel

(ii) $\underline{R}$ mit $\dot{\underline{R}} = 0$
 Bsp: Kreisel mit festem Auflagepkt.

Folgerungen mit (10.4): $\dot{\mathbf{r}}_{Iv}(t) = \dot{\underline{R}}(t) + \underline{\omega}(t) \times \mathbf{r}_v(t)$

b) Impuls:

$$(i) \underline{R} = \underline{R}_S: \quad \underline{P} = \sum_v m_v \dot{\underline{r}}_{Iv} \stackrel{(10.14)}{=} M \dot{\underline{R}}_S + \underline{\omega} \times \underbrace{\sum_v m_v \underline{r}_v}_{=0, \text{ wegen } \underline{R} = \underline{R}_S}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{P} = M \dot{\underline{R}}_S} \quad (10.16)$$

(ii) $\dot{\underline{R}} = 0$



$$\boxed{\underline{P} = \underline{\omega} \times \sum_v m_v \underline{r}_v = \underline{\omega} \times M \underline{r}_S} \quad (10.17)$$

c) Drehimpuls

$$\underline{L}_I = \sum_v m_v \underline{r}_{Iv} \times \dot{\underline{r}}_{Iv} \quad (*)$$

$$= \underline{R} + \underline{r}_v \quad \quad \quad \underline{\dot{R}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_v$$

(i) $\underline{R} = \underline{R}_S:$

$$\underline{\sum_v m_v \underline{r}_v} = 0$$

$$\boxed{\underline{L}_I = \underline{L}_S + \underline{L}} \quad (10.18)$$

$$\text{mit } \underline{L}_S = M \underline{R}_S \times \dot{\underline{R}}_S \stackrel{(10.16)}{=} \underline{R}_S \times \underline{P} \quad (10.19)$$

$$\underline{L} = \sum_v m_v \underline{r}_v \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_v) \quad (10.20)$$

$\underline{L}_I$... Drehimpuls bzgl. Ursprung von IS
 $= \underline{L}_S$... " des Schwerpunkts " "
 $+ \underline{L}$... " des starren Körpers bzgl. Aufpunkt $= \underline{R}_S$

$$(ii) \dot{\underline{R}} = 0: \quad (*) \rightarrow \underline{L}_I = \underline{R} \times (\underline{\omega} \times \underbrace{\sum_v m_v \underline{r}_v}_{M \underline{r}_S}) + \underbrace{\underline{L}}_{(10.20)}$$

$$\underline{P} \quad [s. (10.17)]$$

$$\boxed{\underline{L}_I = \underline{L}_S + \underline{L} = \underline{R} \times \underline{P} + \underline{L}} \quad \begin{matrix} \text{wie (10.18)} \\ - (10.20) \end{matrix}$$

$$\text{mit } \underline{L} \text{ bzgl. } \underline{R} \quad (10.21)$$

d) Trägheitstensor: Umschreibung von (10.20)

[Ein schub: MMP (SS13): Tensoren 2. Stufe
 Kapitel 4: 9.5/16.5.19]

• Hilfsformel: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{a}) = |\underline{a}|^2 \underline{b} - \underline{a} (\underline{a} \cdot \underline{b})$

$$[\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{a}) = \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{a}) - \underline{a} (\underline{a} \cdot \underline{b})] = (|\underline{a}|^2 \underline{1} - \underline{a} \otimes \underline{a}) \underline{b} \quad (10.22)$$

[NB: $\underline{u} \otimes \underline{v}$... dyadisches Produkt von $\underline{u}, \underline{v}$; spezieller Tensor 2. Stufe
 $(\underline{u} \otimes \underline{v}) \underline{b} = \underline{u} \underline{v} \cdot \underline{b} \quad (10.23)$]

• Drehimpuls $\underline{L}$: (10.20) mit (10.22) ($\underline{\omega} = \underline{b}$, $\underline{a} = \underline{r}_v$) (10.24)

$$\boxed{\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega} \quad \text{mit } \underline{\Theta}(\underline{r}) = \sum_v m_v [|\underline{r}_v|^2 \underline{1} - \underline{r}_v(\underline{r}) \otimes \underline{r}_v(\underline{r})]}$$

... Trägheitstensor
 in koordin. unabh. Form

(i) $\underline{\Theta}$... Eigenschaft des starren Körpers

(ii) lineare Abb.: $\underline{L} \uparrow \omega$

• Komponentendarstellung bzgl. ONB $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$e_i \cdot \underline{L} = \underline{\Theta} \underbrace{\omega}_{=\omega_j e_j} \rightarrow L_i = \underbrace{e_i \cdot \underline{\Theta} e_j}_{\Theta_{ij}} \omega_j$$

$$\rightarrow L_i = \Theta_{ij} \omega_j \quad \text{mit } \Theta_{ij} = e_i \cdot \underline{\Theta} e_j = \sum_{\nu} m_{\nu} [(\mathbf{r}_{\nu})^2 \delta_{ij} - x_{\nu i} x_{\nu j}] \quad (10.25)$$

$$\rightarrow \underline{\Theta} = \Theta_{ij} e_i \otimes e_j \quad \text{Matrix } \underline{\Theta} \text{ mit } [\Theta]_{ij} = \Theta_{ij} !! \quad [\text{Bsp. s. \u00dcbung}]$$

• symm. Tensor 2. St. $\Theta_{ij} = \Theta_{ji} \rightarrow 6$ unabh. Komponenten

Hauptdiagonale: $\Theta_{11}, \Theta_{22}, \Theta_{33} \dots$ Tr\u00e4gheitsmomente

Nicht diagonale: $\Theta_{12}, \Theta_{23}, \Theta_{13} \dots$ Derivationsmomente
 $\rightarrow$ Lagerh\u00e4fte Bsp. Rad

• Tr\u00e4gheitsmoment bzgl. Achse $\hat{r}$ mit $|\hat{r}|=1$:

$$\Theta_{rr} = \hat{r} \cdot \underline{\Theta} \hat{r} \quad (10.26)$$

• $\underline{\Theta} = \underline{\Theta}(t)$: ω_0 steht zeitabh. relativ zu IS

(i) ONB des KS: $\{e_1, e_2, e_3\} \dots$ k\u00f6rperfest!

$$\underline{\Theta}(t) = \Theta_{ij}(t) e_i(t) \otimes e_j(t), \quad \Theta_{ij}(t) = \underbrace{e_i(t) \cdot \underline{\Theta}(t) e_j(t)}_{\text{zeitunabh.}} \quad (10.27)$$

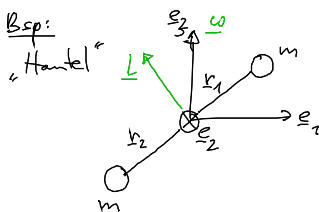
(ii) ONB des IS: $\{e_{I1}, e_{I2}, e_{I3}\} \dots$ raumfest

$$\underline{\Theta}(t) = \Theta_{Iij}(t) e_{Ii} \otimes e_{Ij}, \quad \Theta_{Iij}(t) = e_{Ii} \cdot \underline{\Theta}(t) e_{Ij} \quad (10.28) \\ \dots \text{zeitabh.}$$

• kontinuierliche Massenverteilung

$$\underline{\Theta}(\bar{\mathbf{r}}) = \int_{\text{dm}} d^3r \rho(\mathbf{r}) [(\mathbf{r})^2 \mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}] \quad (10.29)$$

• Bsp:



$$\mathbf{r}_1 = \frac{d}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3), \quad |\mathbf{r}_i| = d \\ \mathbf{r}_2 = -\frac{d}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$$

$$\Theta_{11} = \Theta_{33} = m d^2 2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = m d^2 \\ \Theta_{13} = \Theta_{31} = m d^2 2 \left(0 - \frac{1}{2}\right) = -m d^2 \\ \Theta_{22} = m d^2 2 \cdot (1 - 0) = 2 m d^2$$

$$\Theta_{ij} = 0, \text{ sonst}$$

$$\rightarrow \underline{\Theta} = m d^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.30)$$

$$\underline{\omega} = \omega \mathbf{e}_3: \quad \underline{L} = \underline{\Theta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = m d^2 \omega \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L \neq 0 \rightarrow \frac{dL}{dt} \neq 0 \leftrightarrow \text{Lagerkraft}$$

e) kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_v m_v \dot{r}_{Iv}^2$
 mit $\dot{r}_{Iv} = \dot{R} + \omega \times r_v$

(i) $\underline{R} = \underline{R}_S$: $\sum_v m_v r_v = 0$

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M \dot{R}_S^2 + \frac{1}{2} \sum_v m_v (\omega \times r_v)^2 \quad (10.31)$$

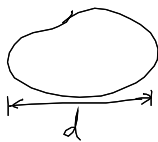
Unterstützung: $\omega \cdot L = \sum_v m_v \omega \cdot [r_v \times (\omega \times r_v)] = \sum_v m_v (\omega \times r_v)^2$
 $a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b)$

$$\rightarrow T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega \cdot L = \frac{1}{2} \omega \cdot \underline{\underline{\Theta}} \omega = \frac{1}{2} \omega_i \Theta_{ij} \omega_j \quad (10.32)$$

... für Rotation um Aufpunkt

(ii) $\dot{R} = 0$: $T = T_{\text{rot}}$

f) potentielle Energie: $U(r_{Iv})$ für m_v , $v = 1, \dots, N$



$r_{Iv} = R + r_v$ mit $|r_v| \leq d$
 $U(r_{Iv}) \stackrel{\text{Taylor}}{=} U(R) + r_v \cdot \text{grad}_v U(r_{Iv})|_R$
 falls $d |\text{grad}_v U(r_{Iv})|_R| \ll U(R)$

$$\rightarrow U(r_{Iv}) \approx U(R)$$

g) Eigenwerte von $\underline{\underline{\Theta}}$

(1) Hauptachsenfrage:

• Eigenwertgl.:

$$\underline{\underline{\Theta}} \underline{e}^{(i)} = \Theta_i \underline{e}^{(i)}$$

(0.8) $\Theta_i \geq 0$... Hauptträgheitsmomente } von $\underline{\underline{\Theta}}$ (10.35)
 $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$... Hauptachsensystem
 mit $\underline{e}^{(i)} \cdot \underline{e}^{(j)} = \delta_{ij}$

• Diagonal gestellt von $\underline{\underline{\Theta}}$:

$$\tilde{\Theta}_{ij} = \underline{e}^{(i)} \cdot \underline{\underline{\Theta}} \underline{e}^{(j)} = \Theta_i \delta_{ij} \rightarrow \tilde{\underline{\underline{\Theta}}} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

keine Summ. konv.

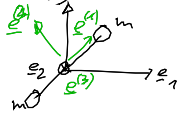
also: $\underline{\underline{\Theta}} = \sum_{i=1}^3 \Theta_i \underline{e}^{(i)} \otimes \underline{e}^{(i)} \quad (10.37)$

3 EW 3 Eulerwinkel $\rightarrow$ 6 unabh. Komp. von $\underline{\underline{\Theta}}$

- Fälle: (i) $\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3$: unsymmetr. Kreisel
(ii) $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$: achsensymmetr. "
(iii) $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$: Würfel oder Kugel

• physikal: $\underline{\omega} \parallel \underline{\varepsilon}^{(i)} \rightarrow \underline{L} \parallel \underline{\omega} \dots$ stabile Drehrichtg!

• Bsp: Hantel:



$$\underline{\Theta} = md^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\varepsilon}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{\varepsilon}_1 + \underline{\varepsilon}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Theta_1 = 0$$

$$\underline{\varepsilon}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\underline{\varepsilon}_1 + \underline{\varepsilon}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Theta_2 = 2md^2$$

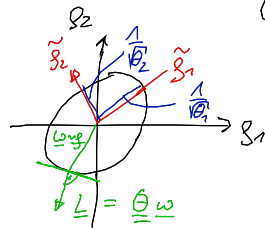
$$\underline{\varepsilon}^{(3)} = \underline{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Theta_3 = 2md^2$$

(2) Trägheitsellipsoid = Fläche der Rot. energie

• $T = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\Theta} \underline{\omega}$ mit $\underline{S} = \frac{\underline{\omega}}{\sqrt{2T}}$

$\rightarrow 1 = \underline{S}_i \Theta_{ij} \underline{S}_j \xrightarrow[\text{Hauptachsen}]{\text{Diagonalisierung}} 1 = \Theta_1 \tilde{S}_1^2 + \Theta_2 \tilde{S}_2^2 + \Theta_3 \tilde{S}_3^2 \quad (10.33)$

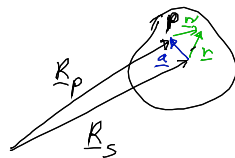
... Trägheitsellipsoid mit Halbachsen $\frac{1}{\sqrt{\Theta_i}}$
(Flächen 2. Grades)



Poinsotsche Konstruktion

... Beweis: Übung

(3) Satz von Steiner



$\underline{\Theta}^{(S)}$ bezogen auf S bekannt

$\rightarrow \underline{\Theta}^{(P)} = M(|a|^2 \underline{1} - \underline{a} \otimes \underline{a}) + \underline{\Theta}^{(S)} \quad (10.39)$

Gesamtmasse

... Trägheits tensor bzgl. Punkt P

Beweis: Übung