14.5. Kanonische Transformationen

- Ziel: alle q_j zyklisch & $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

  $\longrightarrow \quad q_j = \omega_j t + \beta_j$

- Weg: Kanonische Trafo:

$$\boxed{\begin{aligned} Q_k &= Q_k(\{q_j\}, \{p_j\}, t) \\ P_k &= P_k(\{q_j\}, \{p_j\}, t) \end{aligned}} \quad (14.43)$$

wenn Hamiltonsche Bew.gl. forminvariant bzgl. neuem $\bar{H}$

äquivalent: $L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = L(\{Q_k\}, \{\dot{Q}_k\}, t) + \frac{d}{dt} F \quad (14.44)$

erzeugende Fkt.!

(i) $F_1(\{q_j\}, \{Q_j\}, t)$: $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \\ P_j &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \\ \bar{H} &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned}} \quad (14.47) \longrightarrow (14.43)$$

$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \rightarrow Q_j \leftrightarrow -P_j$

(ii) $F_2(\{q_j\}, \{P_j\}, t) = F_1 + \sum_j P_j Q_j \quad (14.48)$

Legendre-Trafo!

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \\ Q_j &= \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \\ \bar{H} &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned}} \quad (14.49)$$

(iii) $F_3(\{p_j\}, \{Q_j\}, t) \underset{\text{Trafo}}{\overset{\text{Leg.}}{=}} F_1 - \sum_j p_j q_j \longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} q_j &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_j} \\ P_j &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \\ \bar{H} &= H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{aligned}} \quad (14.51)$$

... F_3 erzeugt kanon. Trafo

(iv) $F_4(\{p_j\}, \{P_j\}, t) \underset{\text{Trafo}}{\overset{\text{Leg.}}{=}} F_1 + \sum_j P_j Q_j - \sum_j p_j q_j \quad (14.52)$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} q_j &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \\ Q_j &= +\frac{\partial F_4}{\partial P_j} \\ \bar{H} &= H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned}} \quad (14.53)$$

... erzeugt kanon. Trafo

• Beispiel

(i) identische Trafo: $F_2 = \sum_j q_j P_j \longrightarrow$ $p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j$

$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j$!

$\bar{H} = H$

(ii) $\boxed{\text{Punkttrafo} = \text{kanon. Trafo}}$

$$F_2 = \sum_j f_j(\{q_k\}, t) P_j \xrightarrow[Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}]{} Q_j = f_j(\{q_k\}, t), \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

(iii) $F_1 = \sum_j q_j Q_j \longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = Q_j \\ P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -q_j \end{array}\right\}$ Vertauschung von Koord. & Impulsen!

(iv) harm. Oszillator: $(x, p) = (q, p)$

$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2}$ (14.54), mit Federkonst. $f = m\omega^2$

$F_1 = \frac{m}{2} \omega q^2 \cot Q \longrightarrow$ $p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ (1)

$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \frac{1}{\sin^2 Q}$ (2)

$\left.\begin{array}{ll} (2) \longrightarrow & q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad (3) \\ (3) \text{ in } (1) \longrightarrow & p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \quad (4) \end{array}\right\}$ kanon. Umkehr Trafo

(3), (4) in $H \longrightarrow$ $H = \bar{H} = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q$

$\longrightarrow$ $\boxed{H = \omega P \longleftrightarrow \text{Impuls } P = \frac{\text{Energie } E = H}{\omega}}$

Q ... zyklische Koord. $\longrightarrow$ Bewgl. $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$

$\longrightarrow$ $\boxed{Q = \omega t + \alpha}$

$\longrightarrow$ $\boxed{q \overset{(3)}{=} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)}$

15. Hamilton-Jacobische Theorie

• nur Skizzierung!

• Grundidee:

Ges: kanonische Trafo auf $\boxed{\begin{array}{l} Q_k = \beta_k = \text{konst.} \overset{z.B.}{=} q_k(0) \\ P_k = \underbrace{\alpha_k}_{2f \text{ Integrationskonst.}} = \text{konst.} = p_k(0) \end{array}}$ (15.1) damit Hamilton. Bewgl.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \\ 0 &= \dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \\ \text{mit } \bar{H} &= H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \text{o.B.d.A.} \quad \boxed{\bar{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0} \quad (15.2)$$

- erzeugende Fkt.? [vgl. Kap 14.5]

$$\boxed{F_2\left(\{q_j\}, \{P_j\} = \{\alpha_j\}, t\right) = S\left(\{q_j\}, \{\alpha_j\}, t\right)} \quad (15.3)$$

... Hamiltonsche-Jacobische-Wirkungsfkt.
(Hamiltonsche Prinzipalfkt.)

mit $\boxed{p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}}$ (14.49)

in (15.2) $\longrightarrow$ $\boxed{H\left(\{q_j\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_j}\right\}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$ (15.4)

... Hamilton-Jacobische-Dgl. für S

Bem.:

Hamiltonsche Theorie		Hamilton-Jacobische Theorie
Löse $2f$ gewöhnl. Dgl. 1. Ordg in Zeit $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$, $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$	$\xleftrightarrow[\text{zu}]{\text{äquivalent}}$	S als Lsg. von (15.4) nichtl. partielle Dgl. 1. Ordg in $f+1$ Variable q_j, t

- Eigenschaft von S: $\frac{dS}{dt} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{\overset{(15.2)}{=} -H} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_j}}_{= p_j} \dot{q}_j = -H + \sum_j p_j \dot{q}_j \overset{(13.30)}{=} L$

$$\longrightarrow \quad \boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt} \quad !!!$$

- Anschluß an die QM:

IV. Spezielle Relativitätstheorie

- Einstein (1905): [neben Erklärung photoelektr. Effekt: $E = h\nu$ und Brownsche Bewegg: Stokes-Einstein-Relation]

16. Die Lorentz-Transformationen

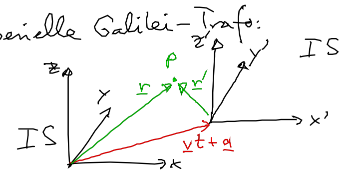
• Trafo von IS $\longrightarrow$ IS'

16.1 Situation vor Einstein

a) Galileisches Relativitätsprinzip

• $\boxed{\text{Alle IS (in ihnen gelten die Newtonschen Axiome) sind gleichwertig} \Leftrightarrow \text{die Newt. Axiome sind „forminvariant" (= kovariant) unter Galileitransf.}}$ (16.1)

• spezielle Galilei-Trafo:



$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t - \underline{a} \quad (16.2) \xrightarrow[\underline{v} = v\underline{e}_x,\ \underline{a} = 0]{\text{o.B.d.A.}}$$

„boost" in x-Richtung

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}} \quad (16.3)$$

Zeit läuft absolut

• Addition von Geschw.:

$$\underline{v}_0 \text{ in IS} \xrightarrow[\frac{d}{dt}(16.2)]{} \underline{v}' = \underline{v}_0 - \underline{v} \text{ in IS}' \quad (16.4)$$

b) Licht = eine Welle: vor Einstein „verwirrende Tatsache"

• Maxwell-Gln.: $\longrightarrow$ Wellengl. für Lichtwellen

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\underline{E} = 0 \quad (16.5) \quad [\text{vgl. (11.24) für Saite}]$$

elektr. Feld

Lichtgeschw. unabhängig von IS ! $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

also: Kugelwelle in IS $\longrightarrow$ Kugelwelle IS'

• Maxwell-Gln. nicht invariant unter Galilei-Trafo

• Ätherhypothese: $\boxed{\text{Licht bewegt sich mit } c \text{ in einem „elastischen Medium", darf keine „Schallwellen" = Longitudinalwellen erlauben!}}$

Äther = IS: $\quad c$, Kugelwelle

IS': $\quad \underline{c} - \underline{v}$ ↯ zu Maxwell-Gln.

keine Kugelwelle

- Michelson-Morley-Exp.:
  $\boxed{\text{gleiches } c \text{ auf Erde \& im Weltraum}}$

$\longrightarrow$ Erklärungsversuche von Lorentz & Fitzgerald: „Lorentzkontraktion"

16.2 Einsteinsches Relativitätsprinzip

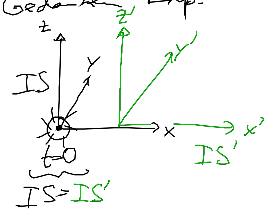
$\boxed{\text{Alle IS sind gleichwertig} \\ = \text{alle physikal. Gesetze sind kovariant unter Lorentztrafo}}$ (16.6)

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Die Lichtgeschw. } c \text{ ist unabhängig von IS}}$ (16.7)

$\longrightarrow$ neue Struktur der Raumzeit! bisher: Euklid. Raum & absolute Zeit
jetzt:

16.3 Der Minkowski-Raum

- Gedanken-Exp.



Ausbreitung eines Lichtpulses bei $t=0$:

$$\left.\begin{aligned} &\text{in IS:} \quad -c^2t^2 + \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r^2} = 0 \\ &\text{in IS':} \quad -c^2t'^2 + \underbrace{(x'^2+y'^2+z'^2)}_{r'^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (16.8)$$

Zeit in IS'

- lineare Trafo: $\{\underline{r}, t\} \longrightarrow \{\underline{r}', t'\}$

  Grd.: $\quad \ddot{\underline{r}} = 0 \longrightarrow \ddot{\underline{r}}' = 0$

  also (16.8) $\quad -c^2t^2 + \underline{r}^2 = \lambda(\underline{v})\left[-c^2t'^2 + \underline{r}'^2\right]$

  (i) $\lambda(\underline{v}) = \lambda(v)$ ... Isotropie des Raumes

  (ii) $IS \to IS' \to IS$: $\lambda^2 = 1 \longrightarrow \lambda = \underset{(-)}{+}1$

  keine Stetigkeit für $v \to 0$

$$\longrightarrow \boxed{-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

... Norm im Minkowski-Raum ist Lorentz-Skalar