

14. Hamiltonsche Mechanik

• Motivation:

- Lagrange Mechanik: $\{q_1, \dots, q_s\}$... generalisierten unabh. Koord.

Lagrange Funktion: $L = L(\{q_s\}, \{\dot{q}_s\}, t) \rightarrow$

Lagrange Bewegung: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0$

$$\rightarrow q_s = q_s(t)$$

aber dynam. Zustand zur Zeit t nur eindeutig festgelegt
bei Kenntnis von

$$\{q_s(t), \dot{q}_s(t)\}$$

Satz von 2f unabh. Variablen

- Hamiltonsche Mechanik:

wähle $\{q_s(t)\}, \{p_s(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\}$

als Satz von 2f unabh. Variablen

$\rightarrow$ Hamilton-Fkt.?

Hamiltonsche Bew. gln.?

• Phasenraum T :

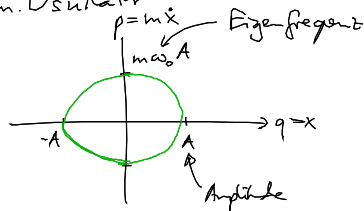
(i) wird aufgespannt durch $\{q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s\}$

$\hat{=}$ 2f Dimensionen

(ii) Punkt in $T \hat{=}$ eindeutiger Zustand eines Systems

(iii) Bahn in $T \hat{=}$ Zeitentwicklung " "

Bsp: harm. Oszillator



• wichtig! $\rightarrow$ tiefe Einsichten in die Struktur der Mechanik

$\rightarrow$ statistische Mechanik

$\rightarrow$ Zugang zur "Quantisierung von mechanischen Systemen"

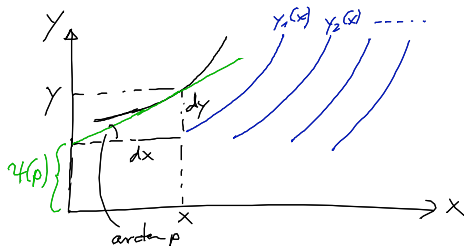
14.1 Legendre Transformation

- Ziel: $\{q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s\} \rightarrow \{q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s\}$
Theorie mit gleicher Info!?

1-dim. allg. Fall

- Geg: allg. Fkt. $y = y(x)$ mit $p(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$ ^{umkehrg.} $x = x(p)$
später $\hookrightarrow$ q_j p_j

$$\rightarrow y = y(x(p)) = y(p)$$



- Frage: $y(p) \rightarrow y(x)$?
 $\hookrightarrow x = x(y)$!

Antwort: nein, denn $y(p) \hat{=}$ Kurvenschar $y_i(x)$ als Lsg.
von $\frac{dy}{dx} = p(y)$

- Ausweg: $y(x)$ ist Einhüllende seiner Tangentenschar

Tangentenschar eindeutig bestimmt durch p , $y = y(p)$
Ordnatenabschnitt

$\rightarrow$ Legendre Transformation:

mit $p = \frac{y - \mathcal{U}}{x} \rightarrow \boxed{\mathcal{U}(p) = y(p) - p \cdot x(p)}$ (14.1)
Bild ... Legendre-Transformierte von $y(x)$

mit Differential: $d\mathcal{U} = dy - p dx - x dp$ $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial p}$

$\rightarrow \boxed{x = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial p}}$ (14.2)

"aus $\mathcal{U}$ wieder x gewonnen!"

- Umkehrung:

$\mathcal{U}(p) \rightarrow x = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial p} \xrightarrow{\text{umkehrg.}} p = p(x) \xrightarrow{\text{in (14.1)}} \boxed{y(x) = y(p(x)) = \mathcal{U}(p(x)) + p(x) \cdot x} !!$

- Anwendung auf $y = y(x_1, \dots, x_n)$ entsprechend
- wichtig: in Thermodynamik!

14.2 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

- Legendre Transformation der Lagrange Fkt.:

also: Austausch aller $\dot{q}_j$ durch $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

$$\rightarrow H(\{q_j\}, \{p_j\}, t) = \sum_{j=1}^f p_j \dot{q}_j - L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) \quad (13.30)$$

... Hamiltonsche Funktion
[vgl. Kap. 13.5.6)]

NB: Minuszeichen $\hat{=}$ Konvention

• Bredue:
Differential: $dH \stackrel{(13.30)}{=} \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$

$$\stackrel{ns}{=} \sum_j \left(\dot{q}_j dp_j + \cancel{p_j d\dot{q}_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j}_{=\dot{p}_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j}_{=p_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_j \left(-\dot{p}_j dq_j + \dot{q}_j dp_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Vergleich der Koeffizienten von dq_j, dp_j, dt :

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \quad (14.4)$$

... Hamiltonsche (kanonische) Gln.

2f Dgln 1. Ordnung für q_j und p_j

$$\& \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (14.5)$$

a) Erhaltungssätze & physikal. Bedeutung von H

(i) Energieerhaltung

- totale Zeitabhängig

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j}_{-\dot{p}_j} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j}_{\dot{q}_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H^{(15)}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

(1) H ... Konstante der Bewegung für $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

(2) $H = T + U$ (13.35)

↖ Gesamtenergie

(ii) zyklische Koordinaten: $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0!$

wegen: $\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ & $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

$\rightarrow \boxed{\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \rightarrow p_j = \alpha = \text{konst.}} \quad (14.7)$

NB: $H = H(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, p_1, \dots, p_{j-1}, \alpha, p_{j+1}, \dots, t)$

mit $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$

H mit nur $2f-2$ Variablen

L mit $2f-1$ " (kann noch $\dot{q}_j$ enthalten)

b) Beispiele:

(i) Teilchen in 3D: $q_i = x_i$

$T = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ U = U(x_1, x_2, x_3) \end{array} \right\} \rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i$

$\rightarrow \boxed{H = T + U = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(x_1, x_2, x_3)} \quad (14.8)$

(ii) Bewegung im Zentralfeld: ebene Bewegung: S, φ

$\bullet H = T + U(S) \quad \text{mit } T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{S}^2 + S^2 \dot{\varphi}^2)$

$\rightarrow \left. \begin{array}{l} p_S = \frac{\partial L}{\partial \dot{S}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = m \dot{S} \\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m S^2 \dot{\varphi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{S} = \frac{p_S}{m} \\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m S^2} \end{array}$

$\rightarrow \boxed{H = \frac{p_S^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m S^2} + U(S)} \quad (14.9)$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Zentrifugalpotential}} \quad \text{für } p_\varphi = \text{konst.} \rightarrow \text{Keplerproblem}$

$\bullet$ Bew.gln.

$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$

$\dot{p}_S = -\frac{\partial H}{\partial S} = \frac{p_\varphi^2}{m S^3} - \frac{\partial U}{\partial S}$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow H = E \dots \text{Energie} = \text{Konstante der Bewegung}$

Lösung: s. Kap. 6.3

(iii) Teilchen im em Feld: $q_i = x_i \dots$ Lautes. Koord

$\bullet L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - q\varphi + q \sum_i A_i \dot{x}_i \quad (12.36)$

- general. Impuls: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + q A_i$ (13.25)
- Hamiltonfkt: $H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L \stackrel{(13.25)}{=} \sum_i m \dot{x}_i^2 + q \sum_i A_i \dot{x}_i - L$
 $\stackrel{(13.30)}{=} \sum_i \left(\frac{m}{2} \dot{x}_i^2 \right) + q \varphi$

$$\rightarrow H \stackrel{(13.25)}{=} \sum_i \frac{(p_i - q A_i)^2}{2m} + q \varphi \quad (14.10)$$

NB. (14.10) aus (14.8) durch Minimal substitution: $p_i \rightarrow p_i - q A_i$
 (14.11)