

10.3 Dynamik des starren Körpers (II): Eulersche Gleichungen

Bisher: Kinematik $\underline{\omega} \leftrightarrow \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$

Drehimpuls $\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega}$ bezogen auf Aufpht. R

a) Dynamische Grundgleichungen

• Impulssatz:

(10.13)
(8.8)

$$\dot{\underline{p}} = \sum_v \underline{F}_v^{(a)} = \underline{F}^{(a)}$$

$$(i) \underline{R} = \underline{R}_s: \quad \underline{p} = M \dot{\underline{R}}_s$$

... Translationsbewegung
Schwerpht.

$$(ii) \dot{\underline{R}} = 0: \quad \underline{p} = \underline{\omega} \times M \underline{r}_s$$

• Drehimpulssatz:

(10.14)
(8.14)

$$\dot{\underline{L}}_I = \underline{D}_I^{(a)} = \sum_v \underline{r}_{Iv} \times \underline{F}_v^{(a)}$$



$$\underline{r}_{Iv} = \underline{R} + \underline{r}_v$$

$$\underline{D} = \sum_v \underline{r}_v \times \underline{F}_v^{(a)} \quad (10.41)$$

... Drehmoment bzgl.
Aufpht. R

$$\stackrel{(10.10)}{=} \underline{\dot{L}}_s + \underline{\dot{L}}$$

$$(i) \underline{R} = \underline{R}_s: \quad \underline{\dot{L}}_s = (\underline{R}_s \times \underbrace{M \dot{\underline{R}}_s}_{\underline{p}}) = \underline{R}_s \times \dot{\underline{p}} = \underline{R}_s \times \underline{F}^{(a)} \quad (10.42)$$

$$(ii) \dot{\underline{R}} = 0: \quad \underline{\dot{L}}_s = \underline{R} \times \dot{\underline{p}} = \underline{R} \times \underline{F}^{(a)} \quad (10.43)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\dot{L}} = \underline{D}} \quad (10.44)$$

... Drehimpulssatz für starre Körper
bzgl. Aufpht. $R \rightarrow$ Rotations-
bewegung

$$\left[\begin{array}{l} \text{vgl. Newton: } \dot{\underline{p}} = \underline{F} \text{ mit } \underline{p} = m \underline{v} \longrightarrow \underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega} \\ \underline{F} \longrightarrow \underline{D} \end{array} \right]$$

b) Euler'sche Glm.:

• Zeitabl. in (10.44): $\cdot = \left(\frac{d}{dt}\right)_{IS} \stackrel{(7.11)}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times \quad (7.11)$

also (10.44) mit (7.11) & $\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega}$: $\left(\frac{d}{dt} \underline{\Theta} \underline{\omega}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times (\underline{\Theta} \underline{\omega}) = \underline{0}$

$$\left(\frac{d\underline{\Theta}}{dt}\right)_{KS} \stackrel{\rightarrow}{=} \underline{\Theta} \left(\frac{d\underline{\omega}}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times (\underline{\Theta} \underline{\omega}) = \underline{0} \quad (10.45)$$

$$\underline{\Theta} = \Theta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

• Drehimpulssatz im körperfesten Hauptachsensystem: $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$
 des starren Körpers:
 $\hookrightarrow \underline{\Theta} \underline{e}^{(i)} = \Theta_i \underline{e}^{(i)}$

$$\underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\Theta} \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \omega_1 \\ \Theta_2 \omega_2 \\ \Theta_3 \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{d\underline{\omega}}{dt}\right)_{KS} = 0!$$

$$(10.45) \xrightarrow{\dot{\omega}_i = \left(\frac{d\omega_i}{dt}\right)_{KS}}$$

$$\begin{cases} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 = D_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 = D_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 = D_3 \end{cases} \quad (10.46)$$

... Euler'sche Gleichungen

$$\longrightarrow \underline{\omega} = \omega_i \underline{e}^{(i)}$$

$$\stackrel{(10.8)}{\text{Dgl.}} \rightarrow \phi(t), \theta(t), \psi(t)$$

Vorteil von KS: $\underline{\Theta}, \Theta_i = \text{konst}$

Nachteil " " : zeitabl. D_i , bestimmt durch Bewegung des starren Körpers

Anwendungen

c) Rotation um freie Achse (hom. Grav.feld):

Bsp: frei fällender Körper: $\underline{R} = \underline{R}_S$

$$\longrightarrow \underline{D} = \sum_v \underline{r}_v \times m_v \underline{g} = \underbrace{\left(\sum_v m_v \underline{r}_v\right)}_{=0} \times \underline{g} = 0!$$

Ges: Lsg. von (10.46) mit $\dot{\omega}_i = 0$

[vgl. $m\dot{v}=0 \rightarrow v = \text{const.}$]

$$(10.46) \quad \begin{array}{l} \dot{\theta}_i = 0 \\ \dot{\omega}_i = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (\theta_3 - \theta_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ (\theta_1 - \theta_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ (\theta_2 - \theta_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{allg. Fall} \\ \theta_i \neq \theta_j \\ i \neq j \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\omega_1 = \text{const.}, \omega_2 = \omega_3 = 0} \quad \text{R. zykl. Verhalten}$$

$\hat{=}$ gleichf. Rotationen um Hauptachsen mit fester Richt. im IS

Bew: $\underline{D} = 0 = \left(\frac{dL}{dt} \right)_{IS}$

$\rightarrow L = \text{const. im IS}$

$= \theta_1 \omega_1 \underline{e}^{(1)}$

$\rightarrow \underline{e}^{(1)} = \text{const. im IS ged}$

Beh: Rotationen um Hauptachse mit mittlerem θ_i ist instabil.

Bew: Stabilitätsanalyse gegenüber Störungen
 $\rightarrow$ Übung

d) kraftfreier symmetr. Kreisel:

Löse (10.46) für $\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$ & $\dot{\theta}_i = 0$

Bsp: rot. symmetr. Körper um $\underline{e}^{(3)} = \text{Figuraachse}$

$\rightarrow$ Kardanscher Kreisel

$\rightarrow$ frei fallende Körper. Bsp: Erde

$(\underline{D}^{\text{sym}} \approx 0, \underline{D}^{\text{asym}} \neq 0)$

$$(10.46) \quad \begin{array}{l} \dot{\theta}_i = 0 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \theta_1 \dot{\omega}_1 + (\theta_3 - \theta_1) \omega_2 \omega_3 = 0 \quad (1) \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_2) \omega_1 \omega_3 = 0 \quad (2) \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad (3) \end{array} \rightarrow \boxed{\omega_3 = \omega_0} \quad (10.49)$$

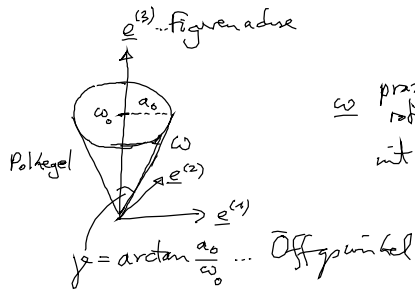
$$(1), (2) \xrightarrow{(10.49)} \quad \begin{array}{l} \dot{\omega}_1 - \Omega \omega_2 = 0 \quad (3) \\ \dot{\omega}_2 + \Omega \omega_1 = 0 \quad (4) \end{array} \quad \text{mit } \boxed{\Omega = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_0} \quad (10.50)$$

$$\frac{d}{dt} (3) \& (4) \quad \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \omega_1(t) = -a_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \omega_2(t) = a_0 \sin(\Omega t + \varphi_0) \end{array}} \quad \text{in (4)}$$

$a_0, \varphi_0 \dots$ Integrations konst.

Kreisbewegung: $\omega_1^2 + \omega_2^2 = a_0^2$

Skizze:



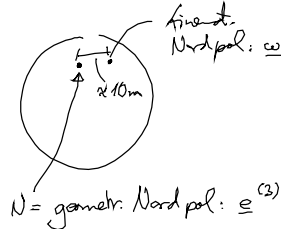
ω präzessiert auf Polkegel um $e^{(3)}$
mit Kreisfrequenz $|\Omega|$

• Bsp: Erde

$$|\Omega| = \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\theta_1} \omega_0$$

$$= \frac{1}{300} \frac{2\pi}{\text{Tag}} \sim \frac{2\pi}{10 \text{ Monate}}$$

real: $\Omega \times \frac{2\pi}{427} \text{ Tage}$



2. keine regelmäßige Präzession um $e^{(3)}$

Urs: (i) Erde nicht starr: elast. Verformungen
Verschiebungen in Atmosphäre
& Meeren

(ii) $D \neq 0$

• Bewegung im IS? $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{IS} \stackrel{D=0}{=} 0 \rightarrow \underline{L} = L e_{I3} = \text{konst}$

$\omega_3 = \omega_0$, $\omega_{12}(t)$ in (10.8) $\rightarrow$ Euler's Winkel

a.B.: $\phi = \frac{a_0 t}{\sin \theta_0} + \phi_0$ $\psi = \Omega t + \psi_0$ $\theta = \theta_0$ mit $\tan \theta_0 = \frac{a_0 \theta_1}{\omega_0 \theta_3}$

↑
Drehg um $e^{(3)}$ um e_{I3} Drehg des starren Körpers um $e^{(3)}$ * (Figurenaxe $e^{(3)}$ um e_{I3})

(10.6): $\underline{\omega} = \dot{\phi} e_{I3} + \dot{\psi} e_3 \dots$ liegt in Ebene von $e_{I3}, e^{(3)} = e_3$

* $(e_{I3}, e_3) = \theta_0$
 $= \text{konst}$
 ω additiv
zusamm. setzen

1. ω rotiert auf Spurkegel um e_{I3}
 2. Polkegel rollt auf Spurkegel ab
- } reguläre Präzession

$\rightarrow$ Kopie!