10.3 Dynamik des starren Körpers (II): Eulersche Gleichungen

Bisher: Kinematik $\underline{\omega} \longleftrightarrow \varphi, \vartheta, \psi, \dot\varphi, \dot\vartheta, \dot\psi$

Drehimpuls $\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$ bezogen auf Aufpkt. $\underline{R}$

a) Dynamische Grundgleichungen

- Impulssatz:

(10.13) (8.8) $\boxed{\dot{\underline{P}} = \sum_\nu \underline{F}_\nu^{(a)} = \underline{F}^{(a)}}$

(i) $\underline{R} = \underline{R}_s$: $\underline{P} = M\dot{\underline{R}}_s$

... Translationsbewegung Schwerpkt.

(ii) $\dot{\underline{R}} = 0$: $\underline{P} = \underline{\omega} \times M\underline{r}_s$

- Drehimpulssatz:

(10.14) (8.14) $\dot{\underline{L}}_I = \underline{D}_I^{(a)} = \sum_\nu \underline{r}_{I\nu} \times \underline{F}_\nu^{(a)}$

$$\underset{\underline{r}_{I\nu} = \underline{R} + \underline{r}_\nu}{=} \underline{R} \times \underline{F}^{(a)} + \underline{D}$$

$\boxed{\underline{D} = \sum_\nu \underline{r}_\nu \times \underline{F}_\nu^{(a)}}$ (10.41)

... Drehmoment bzgl. Aufpkt $\underline{R}$

$$\overset{(10.18)}{\underset{(10.21)}{=}} \dot{\underline{L}}_s + \dot{\underline{L}}$$

(i) $\underline{R} = \underline{R}_s$: $\dot{\underline{L}}_s = (\underline{R}_s \times \underbrace{M\dot{\underline{R}}_s}_{\underline{P}})^{\boldsymbol{\cdot}} \underset{\dot{\underline{R}}_s \times \dot{\underline{R}}_s = 0}{=} \underline{R}_s \times \dot{\underline{P}} = \underline{R}_s \times \underline{F}^{(a)}$ (10.42)

(ii) $\dot{\underline{R}} = 0$: $\dot{\underline{L}}_s = \underline{R} \times \dot{\underline{P}} = \underline{R} \times \underline{F}^{(a)}$ (10.43)

$\Longrightarrow$ $\boxed{\dot{\underline{L}} = \underline{D}}$ (10.44)

... Drehimpulssatz für starre Körper bzgl. Aufpkt. $\underline{R}$ $\longrightarrow$ Rotationsbewegung

[vgl. Newton: $\dot{\underline{p}} = \underline{F}$ mit $\underline{p} = m\underline{v} \longrightarrow \underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$
$\underline{F} \longrightarrow \underline{D}$]

b) Eulersche Gln.:

- Zeitabl. in (10.44): $\dot{\ } = \left(\frac{d}{dt}\right)_{IS} \underset{(7.11)}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times$ (7.11)

also (10.44) mit (7.11) & $\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$: $\left(\frac{d}{dt}\underline{\underline{\Theta}}\underline{\omega}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times (\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}) = \underline{D}$

$$\xrightarrow[\left(\frac{d\underline{\underline{\Theta}}}{dt}\right)_{KS} = 0!]{} \quad \underline{\underline{\Theta}}\left(\frac{d\underline{\omega}}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times (\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}) = \underline{D} \quad (10.45)$$

$\underline{\underline{\Theta}} = \Theta_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

- Drehimpulssatz im körperfesten Hauptachsensystem: $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$ des starren Körpers:

$\hookrightarrow \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{e}^{(i)} = \Theta_i\, \underline{e}^{(i)}$

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & 0 \\ & \Theta_2 & \\ 0 & & \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \Theta_1\omega_1 \\ \Theta_2\omega_2 \\ \Theta_3\omega_3 \end{pmatrix} \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{d\underline{e}^{(i)}}{dt}\right)_{KS} = 0!$$

$$(10.45) \xrightarrow[\dot{\omega}_i = \left(\frac{d\omega_i}{dt}\right)_{KS}]{} \boxed{\begin{aligned} \Theta_1\,\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2\omega_3 &= D_1 \\ \Theta_2\,\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_1\omega_3 &= D_2 \\ \Theta_3\,\dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega_1\omega_2 &= D_3 \end{aligned}} \quad (10.46)$$

.... Eulersche Gleichungen

$$\longrightarrow \quad \underline{\omega} = \omega_i\, \underline{e}^{(i)}$$

$$\xrightarrow[\text{Dgl.}]{(10.8)} \quad \phi(t),\ \Theta(t),\ \psi(t)$$

Vorteil von KS: $\underline{\underline{\Theta}}$, Θ_i = konst

Nachteil " " : zeitabh. D_i, bestimmt durch Bewegung des starren Körpers

Anwendungen

c) Rotation um freie Achse (hom. Grav. feld):

Bsp: frei fallender Körper: $\underline{R} = \underline{R}_S$

$$\longrightarrow \underline{D} = \sum_\nu \underline{r}_\nu \times m_\nu \underline{g} = \underbrace{\left(\sum_\nu m_\nu \underline{r}_\nu\right)}_{=0} \times \underline{g}$$

$$= 0!$$

Ges: Lsg. von (10.46) mit $\dot{\omega}_i = 0$

[vgl. $m\dot{\underline{v}} = 0 \longrightarrow \underline{v} = \text{konst}$]

(10.46) $\xrightarrow[\dot{\omega}_i = 0]{D_i = 0}$
$$\left.\begin{aligned} (\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2\omega_3 &= 0 \\ (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_1\omega_3 &= 0 \\ (\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega_1\omega_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[i \neq j]{\substack{\text{allg. Fall} \\ \Theta_i \neq \Theta_j}} \boxed{\begin{aligned} &\omega_1 = \text{konst.},\ \omega_2 = \omega_3 = 0 \\ &\text{\& zykl. Vertauschg} \end{aligned}}$$

$\hat{=}$ gleichf. Rotationen um Hauptachsen mit feste Richt. im IS

Bew: $\underline{D} = 0 = \left(\frac{d\underline{L}}{dt}\right)_{IS}$

$\longrightarrow \underline{L} = \text{konst.}$ im IS

$= \Theta_1 \omega_1 \underline{e}^{(1)}$

$\longrightarrow \underline{e}^{(1)} = \text{konst.}$ im IS ged

Bel: $\boxed{\text{Rotationen um Hauptachse mit mittlerem } \Theta_i \text{ ist instabil.}}$

Bew: Stabilitätsanalyse gegenüber Störungen

$\longrightarrow$ Übung

d) Kräftefreier symmetr. Kreisel:

Löse (10.46) für $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$ & $D_i = 0$

Bsp: rot. symmetr. Körper um $\underline{e}^{(3)}$ = Figurenachse

$\longrightarrow$ Kardanischer Kreisel

$\longrightarrow$ frei fallende Körper: Bsp: Erde

$(\underline{D}^{\text{Sonne}} \approx 0,\ \underline{D}^{\text{Mond}} \approx 0)$

(10.46) $\xrightarrow[\Theta_1 = \Theta_2]{D_i = 0}$
$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_1)\,\omega_2\omega_3 &= 0 \quad (1) \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_1\omega_3 &= 0 \quad (2) \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \quad (3) \longrightarrow \boxed{\omega_3 = \omega_0} \quad (10.49) \end{aligned}$$

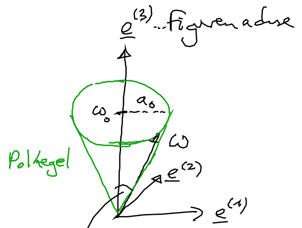
(1),(2) $\xrightarrow{(10.49)}$
$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 - \Omega\,\omega_2 &= 0 \quad (3) \\ \dot{\omega}_2 + \Omega\,\omega_1 &= 0 \quad (4) \end{aligned} \qquad \text{mit } \boxed{\Omega = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1}\,\omega_0} \quad (10.50)$$

$\frac{d}{dt}$(3) & (4)
$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0 \xrightarrow[\text{in (4)}]{} \boxed{\begin{aligned} \omega_1(t) &= -a_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \omega_2(t) &= a_0 \sin(\Omega t + \varphi_0) \end{aligned}}$$

a_0, φ_0 ... Integrationskonst.

Kreisbewegg: $\omega_1^2 + \omega_2^2 = a_0^2$

Skizze:

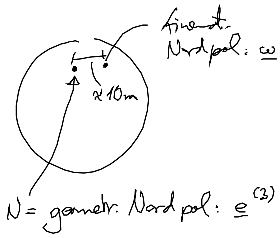


$\gamma = \arctan \frac{a_0}{\omega_0}$ ... Öffnungswinkel

$\underline{\omega}$ präzessiert / rotiert auf Polkegel um $\underline{e}^{(3)}$

mit Kreisfrequenz $|\Omega|$

- Bsp: Erde



$$|\Omega| = \frac{|\Theta_1 - \Theta_3|}{\Theta_1}\,\omega_0$$

$$= \frac{1}{300}\,\frac{2\pi}{\text{Tag}} \sim \frac{2\pi}{10\,\text{Monate}}$$

real: $\Omega \approx \frac{2\pi}{427}$ Tage

& keine regelmäßige Präzession um $\underline{e}^{(3)}$

Grd: (i) Erde nicht starr: elast. Verformungen
Verschiebungen in Atmosphäre & Meeren

(ii) $\underline{D} \neq 0$

- Bewegg im IS? $\quad \left(\frac{dL}{dt}\right)_{IS} \overset{D=0}{=} 0 \longrightarrow \underline{L} = L\,\underline{e}_{I3} = \text{konst}$

$\omega_3 = \omega_0$, $\omega_{1/2}(t)$ in (10.8) $\longrightarrow$ Eulersche Winkel

o.B.: $\quad \phi = \frac{a_0 t}{\sin\Theta_0} + \phi_0 \qquad \psi = \Omega t + \psi_0 \qquad \Theta = \Theta_0$ mit $\operatorname{tg}\Theta_0 = \frac{a_0}{\omega_0}\frac{\Theta_1}{\Theta_3}$

Drehg von $\underline{e}^{(3)}$ um $\underline{e}_{I3}$ $\qquad$ Drehg des starren Körpers um $\underline{e}^{(3)}$ $\qquad$ $\measuredangle$(Figurenachse $\underline{e}^{(3)}$ und $\underline{e}_{I3}$)

(10.6): $\quad \underline{\omega} = \underbrace{\dot{\phi}}_{=\frac{a_0}{\sin\Theta_0}}\,\underline{e}_{I3} + \underbrace{\dot{\psi}}_{=\Omega}\,\underline{e}_3$ ... liegt in Ebene von $\underline{e}_{I3}$, $\underline{e}^{(3)} = \underline{e}_3$

$\measuredangle(\underline{e}_{I3}, \underline{e}_3) = \Theta_0 = \text{konst}$

$\underline{\omega}$ additiv zusammensetzen $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ \underline{\omega} \text{ rotiert auf Spurkegel um } \underline{e}_{I3} \\ 2.\ \text{Polkegel rollt auf Spurkegel ab} \end{array} \Bigg\}\ \text{reguläre Präzession}}$$

$\longrightarrow$ Kopie!