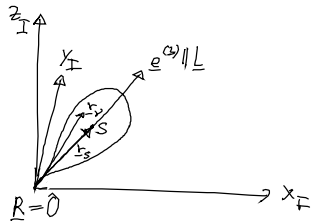


e) Schwerer, symmetrischer Kreisel: $D_i \neq 0$



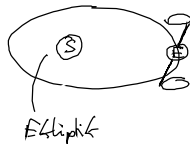
• homog. Grav.feld: $\underline{D} = - \sum_V \underline{r}_V \times m_V \underline{g} \underline{e}_{I3}$

$$\left(\underline{r}_s = \frac{\sum m_V \underline{r}_V}{M} \right) \Rightarrow \underline{D} = - \underline{r}_s \times M \underline{g} \underline{e}_{I3} = \frac{d\underline{L}}{dt} \perp \underline{e}^{(2)} (\parallel \underline{r}_s),$$

• sei $\underline{L} \parallel \underline{e}^{(3)} \xrightarrow{\frac{d\underline{L}}{dt} \perp \underline{L}} \underline{L} \parallel \underline{e}^{(3)}$ präzediert um die z_I -Achse!

• o.B.: allg. Bewegung: Präzession & Nutation
↳ "Torkeln" des Kreisels

• Erde: $\underline{D}_{\text{Sonne}} \neq 0, \underline{D}^{\text{Mond}} \neq 0 \rightarrow$ astronomische Präzession der Erdatse um Normale der Ekliptik: Periode 26000 Jahre



f) Eingespannter Kreisel: ortsfeste Drehachse

(1) Rot. symmetrie um Drehachse $\underline{\omega} \parallel \underline{e}_{I3} = \underline{e}_3$

$$\rightarrow \underline{\Theta}_I = \begin{pmatrix} \Theta_{I11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{I11} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{I33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{L} = \underline{\Theta}_I \underline{\omega} \underline{e}_{I3} = \Theta_{I33} \underline{\omega} \underline{e}_{I3} \parallel \underline{\omega}$$

$$\text{mit } \dot{\underline{\omega}} = 0, \dot{\Theta}_{I33} = 0 \rightarrow \dot{\underline{L}} = 0 \rightarrow \underline{D} = 0 \checkmark$$

(2) ohne Rot. symmetrie $\hat{=}$ nicht ausgewuchtete starrer Körper:

$$\Theta_{I13}(t), \Theta_{I23}(t) \neq 0$$

$$\text{mit } \underline{\omega} = \omega \underline{e}_{I3} \rightarrow \begin{aligned} L_{I1} &= \Theta_{I13}(t) \omega \\ L_{I2} &= \Theta_{I23}(t) \omega \end{aligned}$$

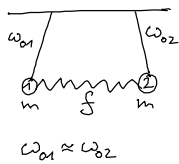
$$\rightarrow \left. \begin{aligned} D_{I1} &= \dot{L}_{I1} = \dot{\Theta}_{I13} \omega \\ D_{I2} &= \dot{L}_{I2} = \dot{\Theta}_{I23} \omega \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Drehmomente, die durch} \\ &\text{Lager aufgebracht werden} \\ &\text{müssen} \hat{=} \text{Lagerkräfte} \\ &\text{(Bsp. Autovad)} \end{aligned}$$

g) physikalisches Pendel: $\rightarrow$ Übung

11. Harmonisch gekoppelte Massepunkte

11.1 Motivation

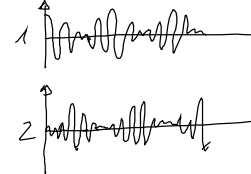
- gekoppelte Pendel:



Spezialfall schwacher Kopplung:

$$\omega_{0i}^2 \gg \frac{f}{m}$$

→ Schwebungen: Energie pendelt zwischen 1 & 2



- Molekülschwingungen:



→ Molekülphysik

- Gitterschwingungen des Festkörpers:
↳ quantisiert: Phononen



→ Festkörperphysik: spezifische Wärme
elektr./therm. Leitfähigkeit

Untersuche über
Spektroskopie
(Einschallig von
EM-Wellen &
Absorption)

⇒ „Eigenfrequenzen“

- Modell für Seite:



11.2 Grundproblem

- N Massepunkte im 3d-Ortsraum: Freiheitsgrad $f = 3N$
- Führe ein: $3N$ -dim. kartesischer Konfigurationsraum.

$$\text{Vektoren } \underline{X} = (\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_N}_{\substack{\text{Ortskoord. der} \\ N \text{ Teilchen}}}) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_{3N}) \quad (11.1)$$

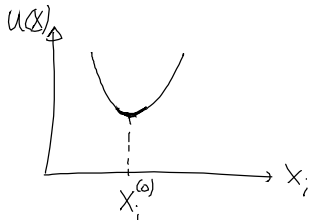
Bsp: $x_{323} = x_{2768}$
↑

y-Koord. des
Teils des 323

$\underline{X}$... charakt. Anordg der N Massepunkte

• konservatives System: pot. Energie $U = U(\underline{X})$ (11.2)

• Def: Gleichgewichtslage $\underline{X}^{(0)}$ des Systems
 $\triangleq$ Minimum von $U(\underline{X})$: $\left. \frac{\partial U}{\partial X_i} \right|_{\underline{X}^{(0)}} = 0$ (11.3)



• „Harmonische Kopplung“ $\triangleq$ Potential in „harmonischer“ Näherung
 mit $\underline{X} = \underline{X}^{(0)} + \underline{x}$, wobei $\underline{x}$... Auslenkung aus GG-Lage

$$U(\underline{X} = \underline{X}^{(0)} + \underline{x}) \stackrel{\text{Taylor}}{=} U(\underline{X}^{(0)}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{2N} \left. \frac{\partial U}{\partial X_i} \right|_{\underline{X}^{(0)}}}_{=0!} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} \right|_{\underline{X}^{(0)}} x_i x_j + \dots$$

mit „Federkonstantenmatrix“:

$$U_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} \right|_{\underline{X}^{(0)}} \quad (11.4)$$

→ Potential:

$$U(\underline{X}) = U(\underline{X}^{(0)}) + \underbrace{\frac{1}{2} U_{ij} x_i x_j}_{= \frac{1}{2} \underline{x} \cdot \underline{U} \underline{x}} \quad (11.5)$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2N} \end{pmatrix}$$

$\underline{U}$... $2N \times 2N$ -Matrix: (i) symmetrisch $\frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_j \partial X_i}$

mit $[U]_{ij} = U_{ij}$

(ii) positiv definit: $\frac{1}{2} \underline{x} \cdot \underline{U} \underline{x} > 0$
 $\forall \underline{x} \neq 0$

$\triangleq$ stabiles Minimum

$\triangleq$ alle EW > 0

- kinet. Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot \underline{M} \dot{\underline{x}} \quad \text{mit Massenmatrix } \underline{M}: \quad (11.6)$$

$M_{ij} = m_i \delta_{ij}$
(diagonal Tensor/Matrix)

NB: $m_1, m_2, m_3 \dots$ Teilchen 1
etc.

- Newtonsche Gldg. für den i -ten Freiheitsgrad:

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i} = - U_{ij} x_j \quad (11.7)$$

(11.5)

mit „masse-reduzierte“ Koord.: $y_i = \sqrt{m_i} x_i$ (11.8)

& dynamische Matrix: $\Omega_{ij} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} U_{ij} \frac{1}{\sqrt{m_j}}$ (11.9)

(11.10)

$$(11.7): \sqrt{m_i} \ddot{x}_i = - \frac{1}{\sqrt{m_i}} U_{ij} \frac{1}{\sqrt{m_j}} \sqrt{m_j} x_j \longrightarrow \ddot{y}_i + \Omega_{ij} y_j = 0 \iff \ddot{\underline{y}} + \underline{\Omega} \underline{y} = 0$$

... 2N Bew.gln.

- Eigenschaften von $\underline{\Omega}$: (i) symmetrisch: $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$
(ii) positiv definit: pot. Energie $\rightarrow U(\underline{y}) = \frac{1}{2} \underline{y} \cdot \underline{\Omega} \underline{y} > 0, \forall \underline{y} \neq 0$
 $\hat{=} E.W. \text{ von } \underline{\Omega} > 0$
Gibt Minimum von $U(\underline{X})$

11.3 Eigenfrequenzen, Eigenschwingungen, Normalkoordinaten

- Gl. (11.10) $\hat{=}$ mathemisch: $f = 2N$ lineare homogene D. Gl. 2. Ord.
mit konst. Koeff.
 $\hat{=}$ physikal: $f = 2N$ gekoppelte lineare Oszillatoren
 $\rightarrow f$ Lösungen mit je 2 Integ. konst.

- Lsgs.-ansatz: (vgl. harm. Oszillator Kap. 5.1)

$$\underline{y} = \underline{a} e^{i\omega t}, \quad \underline{a} \in \mathbb{R}^{2N}$$

in (11.10) $e^{i\omega t}$

$$[-\omega^2 \underline{1} + \underline{\Omega}] \underline{a} = \underline{0} \quad (11.11)$$

$$\dots \text{Eigenwert gl. f. } \underline{\Omega}: \underline{\Omega} \underline{a} = \omega^2 \underline{a}$$

$\hat{=}$ lineares homogenes
algebraisches Gln. system

- EW von $\underline{\Omega}$? nichttriv. Lsg. von (11.11): $\det[-\omega^2 \underline{1} + \underline{\Omega}] = 0$ (11.12)

... Polynom f -ten Grades in ω^2

→ EW von $\underline{Q}$: $[\omega^{(k)}]^2 > 0$ ($\underline{Q}$ symmetr./pos. definitiv)

→ Eigenfrequenzen: $\pm \omega^{(k)} \in \mathbb{R}, k = 1 \dots 3N$ (11.13)

• EV von $\underline{Q}$? Löse (11.11) mit $\omega^{(k)}$

$$\left[\underline{e}^{(k)} \text{ mit } |\underline{e}^{(k)}| = 1, \underline{e}^{(k)} \cdot \underline{e}^{(l)} = \delta_{kl} \right] \quad (11.14)$$

... vollständiges ONB
im $\mathbb{R}^{3N}$ $\underline{Q} = \underline{Q}^T$

• reelle Lsg. von (11.10): (vgl. Kap. 5.1)

$$\left. \begin{matrix} e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{matrix} \right\} \rightarrow \left[\underline{y}^{(k)}(t) = a^{(k)} \underline{e}^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)}) \right] \quad (11.15)$$

... Eigen-/Normal schwingung/Eigenmoden
zur Eigenfrequenz $\omega^{(k)}$

... Integrat. konst.: Amplitude $a^{(k)}$, Phase $\varphi^{(k)}$

... EV $\underline{e}^{(k)}$... charakterisiert kollektive Schwingung
aller Massepunkte mit unterschiedlicher
Auslenkung

• allg. Lsg. von (11.10):

Superpositionsprinzip: →

$$\underline{y} = \sum_{k=1}^f \underline{y}^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^f a^{(k)} \underline{e}^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)}) \quad (11.16)$$