

12.5 Lagrangesche Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (12.26)$$

$$Q_j = \sum_i F_i^{(A)} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (12.25)$$

... generalisierte Kraft

Sanduff'sche:

a) konservative Systeme:

$$F_i^{(A)} = -\nabla_i U \quad (12.27)$$

$$\rightarrow Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (12.28)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (12.29)$$

... Lagrangesche Gln.

$$\text{mit } L = T - U \quad (12.30)$$

... Lagrange Funktion

b) generalisiertes / geschwindigkeitsabhängiges Potential W :

• Annahme: $W = W(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$ existiert

$$\text{mit } Q_j = -\frac{\partial W}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} \quad (12.31)$$

$$(12.26) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (12.32)$$

$$L = T - W$$

• Bsp: geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

- Lorentzkraft: $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (12.33)$

$\nwarrow$ Ladg. $\nwarrow$ elektr. Feld $\nwarrow$ Geschw. $\nwarrow$ Magnetfeld
 $\vec{r}$

- o.B.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (12.34)$$

$\varphi(\vec{r}, t)$... skalare Potential

$\vec{A}(\vec{r}, t)$... Vektor "

$$\stackrel{(12.34)}{(12.33)} \rightarrow \mathbf{F} = q \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right)$$

$$(i) \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}}_{\substack{\text{Änderung, die Teile der} \\ \text{von } \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t) \text{ sieht}}}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$(ii) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} + \left(\dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \mathbf{A}$$

$\stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \mathbf{A} \dots$

$$\rightarrow \mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{d}{dt} \mathbf{A} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right]$$

$$\rightarrow F_i = q \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \varphi) \right] \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} = 0!$$

$= A_i!$

$$\begin{matrix} v_i = \dot{x}_i \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \end{matrix} \rightarrow \boxed{F_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} W + \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i}} \quad (12.35)$$

mit $W = q(\varphi - \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}})$

$$\text{also: } \boxed{L = T - q\varphi + q \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}} \quad (12.36)$$

c) Reibungskräfte

- Aufteilung der Kräfte: $F_i^{(H)} = \text{kons. Kraft} + \text{Rest}$
 $\hookrightarrow L = T - U$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j} \quad (12.37)$$

"Rest", Reibungskraft

- Reibungskraft
 linearer Ansatz: $F_{i\alpha}^{(R)} = -\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \dot{x}_{i\beta} \quad (12.38), \alpha, \beta = 1, 2, 3$

Bsp: Stokes'sche Reibung für Kugel: $\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma \delta_{\alpha\beta}$
 [s. (3.18)]
 $\rightarrow F_{i\alpha}^{(R)} = -\gamma \dot{x}_{i\alpha}$
 $F_i^{(R)} \parallel \dot{\mathbf{x}}_i$

- Rayleighsche Dissipationsfkt:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_i \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \dot{x}_{i\alpha} \dot{x}_{i\beta}, \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma_{\beta\alpha}^{(i)}} \quad (12.39)$$

$$\rightarrow \boxed{F_{i\alpha}^{(R)} = -\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} = -\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \dot{x}_{i\beta}} \quad (12.40)$$

Bsp: $\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma \delta_{\alpha\beta} \quad W = \frac{1}{2} \sum_i \gamma \underbrace{\dot{x}_{i\alpha}^2}_{v_i^2}$
 $F_{i\alpha}^{(R)} = -\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} = -\gamma \dot{x}_{i\alpha} \checkmark$

• physikal. Interpretation:

$$-\sum_i \mathbf{F}_i^{(R)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \dot{x}_{i\alpha} f_{\alpha\beta}^{(R)} \dot{x}_{i\beta} = 2W$$

$2W$... die von den Reibkräften träge dissipierte Leistung (12.41)

• generalisierte Kräfte:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_i \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} \frac{\partial x_{i\alpha}}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} \quad [\text{vgl. (12.22)}]$$

$$\rightarrow Q_j = - \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} \quad (12.42)$$

„generalisierte Geschw.“

• Euler-Lagrange Gln:

$$(12.37) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (12.43)$$

„Reibung“

[Analog: A.U. für R HS: Phys. Rev. Lett. 103, 193801 (2009)]

13. Das Hamiltonsche Prinzip

• bisher: d'Alemberts Prinzip: $\sum_i (\mathbf{F}_i^{(A)} - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$
 $\rightarrow$ Differentialprinzip: $\delta \mathbf{r}_i$ zu Zeit t

• jetzt: Integralprinzip: virtuelle Verschiebung der gesamten Bahn & Extremal

„Mechanik, Elektromagnetismus, komplexe Materialien
Rel. Theorie, fundamentale Wd der Natur“

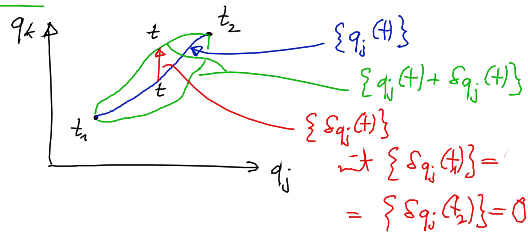
$\rightarrow$ altern. Herleitung der Lagrange Gln. 2. Art

13.1 Hamiltonsches Prinzip („der kleinste Wirkungs“)

• mechan. System: s generalisierte, voneinander unabh. Koord.
 $q_1(t) \dots q_s(t) = \{q_j(t)\}$

- physikal. / virtuelle Bahnen

2D-Schnitt des
f. dim. Konfigurations-
raumes



- Hamiltonsches Prinzip:

Die physikalische Bahn eines Systems zwischen $\{q_i(t_1)\}$ und $\{q_i(t_2)\}$ im Konfigurationsraum ist durch ein Extremum der Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) dt$ ausgezeichnet:

$$\delta S = 0$$

↳ Variation von S

L heißt Lagrange Fktn.

Bem: (i) $\delta S = \text{Änderung von } S \text{ bei } \{q_j(t)\}$
 $\rightarrow \{q_j(t) + \delta q_j(t)\}$

(ii) Extremum: $SS=0$
Minimum or Maximum?

(iii) Einheit von S : Energie $\times$ Zeit

- konservative Kräfte / generalisiertes Potential U :

$$Q_j = -\frac{\partial u}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j}$$

Bel: $L = T - U$
 $\delta S = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (13.3)$

... Lagrange Gl. 2. Art [vgl. (12.29), (12.38)]

Beweis: Kap. 13.3

- fundamentale Ww in der Natur:

- 1. Gummiklan
 - 2. EM Ww
 - 3. schwache Ww (Naurino)
 - 4. starke Ww (Kamkräfte)
- } herleitbar über Hamiltonsches Prinzip + L

13.2 Eulersche Variationsrechnung

- 1D-Fall: Variationsproblem

Geg: Funktion $y(x)$

$$\text{Funktional } F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y, \underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}}, x\right) dx$$

... ordnet $y(x)$ eine Zahl zu!

Ges: $y(x)$, so daß $F[y(x)]$ extremal für feste $y(x_1), y(x_2)$

- diskretisierte Version: (i) zur Verfeinerung
(ii) Vorgehen der Numerik

