Wh.: Quantisierung des freien Strahlungsfeld: $\rho(\underline{r},t)=0$, $\underline{j}(\underline{r},t)=0$

Klass. Elektrodynamik, Potentialgleichung in der Coulombeichung ($\nabla\cdot\underline{A}(\underline{r},t)=0$)

$$-\Delta\underline{A}+\frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}}=0$$

($\phi(\underline{r},t)$ ist für $\rho=0$ immer Null in der Coulombeichung!)

Lösungsansatz: $\underline{A}(\underline{r},t)=\sum_{\underline{k}}\left(\frac{\hbar}{2\omega_k\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_{\underline{k}}\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})e^{-i\omega_k t}+a_{\underline{k}}^*\underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r})e^{+i\omega_k t}\right)$

Entwicklung nach Eigenmoden

transversal! ($\nabla\cdot\underline{u}_{\underline{k}}=\nabla\cdot\underline{u}_{\underline{k}}^*=0$)

und $\Delta\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})+\frac{\omega_k^2}{c^2}\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})=0$ $\qquad\int d\underline{r}\,\underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})=\delta_{\underline{k}\underline{k}'}$

Hamiltonian des freien Strahlungsfeldes?

direkte (wenn auch nicht rigorose) Weg: Gewinne $\hat{H}$ aus dem klass. Ausdruck für die Energie E des elektromagnet. Feldes

$$E=\int d\underline{r}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\underbrace{(\underline{E}(\underline{r},t))^2}_{\text{elektr. Feld}}+\frac{1}{2\mu_0}\underbrace{(\underline{B}(\underline{r},t))^2}_{\text{magnet. Feld}}\right)$$

benutze (Coulomb-Eichung) $\underline{E}=-\dot{\underline{A}}(\underline{r},t)$, $\underline{B}=\nabla\times\underline{A}$

Insgesamt ergibt sich (nach länglicher Rechnung)

$$E=\frac{1}{2}\sum_{\underline{k}}\frac{\hbar\omega_k}{2}\left(a_{\underline{k}}a_{\underline{k}}^*+a_{\underline{k}}^*a_{\underline{k}}\right)\qquad\text{Beitrag aus }\underline{E}^2$$

noch klassisch!

$$+\frac{1}{2}\sum_{\underline{k}}\frac{\hbar\omega_k}{2}\left(a_{\underline{k}}a_{\underline{k}}^*+a_{\underline{k}}^*a_{\underline{k}}\right)\qquad\text{Beitrag aus }\underline{B}^2$$

$$\Rightarrow\boxed{E=\frac{1}{2}\sum_{\underline{k}}\hbar\omega_k\left(a_{\underline{k}}a_{\underline{k}}^*+a_{\underline{k}}^*a_{\underline{k}}\right)}$$

Jetzt Quantisierung:

$$\overset{\text{Energie}}{E}\longrightarrow\hat{H}$$

$$\underbrace{a_{\underline{k}}\longrightarrow\hat{a}_{\underline{k}}}_{\text{Vernichter}},\quad\underbrace{a_{\underline{k}}^*\longrightarrow\hat{a}_{\underline{k}}^+}_{\text{Erzeuger}}\quad\text{mit}\quad[\hat{a}_{\underline{k}},\hat{a}_{\underline{k}'}^+]=\delta_{\underline{k},\underline{k}'}$$

$$[\hat{a}_{\underline{k}},\hat{a}_{\underline{k}'}]=0$$

also bosonische Vertauschungsrelationen!
wie bei den Phononen!

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\underline{k}} \hbar\omega_{\underline{k}} \left(\hat{a}_{\underline{k}}^+ a_{\underline{k}} + \frac{1}{2}\right) \\ \hat{H} &= \sum_{\underline{k}} \hbar\omega_{\underline{k}} \left(\hat{N}_{\underline{k}} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad \hat{N}_{\underline{k}} = \hat{a}_{\underline{k}}^+ \hat{a}_{\underline{k}} \end{aligned}}$$

Hamiltonoperator des "freien" elektromagnet. Feldes $(\rho(\underline{r},t)=0,\ \underline{j}(\underline{r},t)=0)$

Bemerkungen:

- Die zu diesem $\hat{H}$ gehörenden Quasiteilchen heißen Photonen (Lichtquanten)

- Photonen sind Bosonen, wie durch die Kommutatorrelationen ausgedrückt!

"Alternativbegründungen":

  - man weiß aus Experimenten, dass Photonen Spin 1 haben, d.h. s ganzzahlig $\longrightarrow$ Bosonen

  - Experimente zeigen, dass die statistische Eigenschaften bosonischen Charakter haben (Bose-Einstein-Statistik)
    $\longrightarrow$ Planck'sche Strahlungsformel, Hohlraumstrahlung!

- Analog zur Energie wird auch das Potential $\underline{A}$ quantisiert

$$\underline{A} \longrightarrow \hat{\underline{A}} = \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\underline{k}}\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{a}_{\underline{k}}\, \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\, e^{-i\omega_{\underline{k}} t} + \hat{a}_{\underline{k}}^+\, \underline{u}_{\underline{k}}^*\, e^{i\omega_{\underline{k}} t}\right)$$

IV.3. Lagrangedichte-Formalismus

Formalismus:

Klass. Punktmechanik: $\quad$ Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$

(z.B. eindimensional) $\quad$ generalisierte Koordinaten

Klass. Feldtheorie:

$$L = \int d\underline{r}\, \mathcal{L} \quad \text{Lagrangedichte}$$

mit $\mathcal{L} = (\varphi_i, \varphi_{i,\mu})$ $\quad$ mit $\varphi_i = \varphi_i(\underline{r}, t)$ Felder

$= L(x^0) = L(t)$

falls explizit Zeitabhängigkeit vorhanden in $\mathcal{L}$

$$\varphi_{i,\mu}(\underline{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_i(\underline{r}, t)$$

$$x^\mu = (t, x, y, z)$$

z.B. $\varphi_{i,0}(\underline{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i = \dot{\varphi}_i$

Es gilt ein Wirkungsprinzip

$$S = \int dx^0\, L(t) = \int dt \int dx \int dy \int dz\, \mathcal{L}$$

mit $\delta S = 0$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung für Felder:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}} = 0}$$

benutze Einstein'sche Summenkonvention!

völlig analog zu $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$ für Punktteilchen

Konjugiertes Impulsfeld zum Feld φ_i:

$$\Rightarrow \quad \Pi_{\varphi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} = \Pi_i \qquad \left(\text{analog zu } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

Übergang zur Hamiltonfunktion:

$$H = \int d\underline{r}\, \mathcal{H} \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{H} = \sum_i \dot{\varphi}_i \Pi_i - \mathcal{L}$$

Hamiltondichte

Legendretransformation

Wir haben jetzt also kanonisch konjugierte Feldvariablen definiert

Quantisierung

ersetze $\varphi_i \to \hat{\varphi}_i$, $\Pi_{\varphi_i} \to \hat{\Pi}_{\varphi_i}$

$(\varphi_i^* \to \hat{\varphi}_i^+)$, $\tilde{\Pi}_i \to \hat{\tilde{\Pi}}_i$

mit Vertauschungsregeln

$$[\hat{\varphi}_i(\underline{r},t), \hat{\Pi}_j(\underline{r}',t)]_\pm = i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

mit $[\ldots]_-$ Bosonen

$[\ldots]_+$ Fermionen

analog zu den Definition in Kap. II (Vielteilchensysteme)

dann: $H \to \hat{H}$

Anwendungen der klass. Feldtheorie in der Elektrodynamik

a) Elektrostatik

interessierendes Feld: $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla \phi(\underline{r})$

Ansatz für Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\nabla \phi(\underline{r})\right)^2}_{\text{Energiedichte des elektrostatischen Feldes}} - \underbrace{\rho(\underline{r})\,\phi(\underline{r})}_{\text{potentielle Energie einer Ladungsdichte } \rho(\underline{r}) \text{ im Potential } \phi(\underline{r})}$$

Die Feldvariable ist also $\phi(\underline{r})$!

Die Ladungsdichte betrachten wir hier als fest vorgegeben!

Lagrange-Gl. (beachte: hier keine Zeitableitung!)
da $\phi(\underline{r})$ statisch

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi/\partial x_k} \overset{!}{=} 0$$

$$-\rho(\underline{r}) - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{l=1}^{3} \frac{\varepsilon_0}{2} 2 \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \delta_{kl} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\rho(\underline{r}) - \varepsilon_0 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}}_{-E_k} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}}$$

(Gauss'sches Gesetz)

($\nabla \times \underline{E} = 0$ ist automatisch erfüllt durch ~~folgt dann aus~~ $\underline{E} = -\nabla \phi$)

b) Magnetostatik

fest vorgegebene Stromdichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0} \Big(\underbrace{\nabla \times \underline{A}(\underline{r})}_{\underline{B}} \Big)^2 - \underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{A}(\underline{r})$$

Feldvariablen sind hier die 3 Komponenten des Vektorpotentials $A_k(\underline{r})$ mit $k = 1,2,3$

liefert: $\boxed{\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}(\underline{r})}$

Ampere'sches Gesetz

($\nabla \cdot \underline{B} = 0$ wieder automatisch erfüllt durch $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$)

c) Elektrodynamik

hier $\underline{E} = -\nabla \phi - \dot{\underline{A}}$, $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ (keine Festlegung der Eichung!)

erster Versuch für $\mathcal{L}$: Einfache Addition von den Ausdrücken für die Elektro- und Magnetostatik

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2}_{\underline{E}^2} + \frac{1}{2\mu_0}\underbrace{(\nabla\times\underline{A})^2}_{\underline{B}^2} - \rho\phi - \underline{j}\cdot\underline{A}$$

liefert nicht alle Maxwellgleichungen richtig!

Richtige Lagrangedichte

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2 - \rho\,\phi + \underline{j}\cdot\underline{A}}$$

- Feldvariablen sind $\phi(\underline{r},t)$ und $A_k(\underline{r},t)$ mit $k=1,2,3$ (x,y,z)
- Die "Quellen" $\rho(\underline{r},t)$ und $\underline{j}(\underline{r},t)$ sind fest vorgegeben!

Lagrange-Gl. bzgl. ϕ führt auf $\nabla\cdot\underline{E} = \frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$

" bzgl. der Komponenten von $\underline{A}$ führt auf $\nabla\times\underline{B} = \mu_0\underline{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$

Die beiden anderen Maxwellgl. folgen aus den Def. $\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$

$$\Rightarrow \nabla\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\underline{A}) = -\dot{\underline{B}}$$

$$\underline{B} = \nabla\times\underline{A} \Rightarrow \nabla\cdot\underline{B} = 0$$

Betrachte nun noch einmal die Quantisierung des freien Strahlungsfeldes

Sei also $\rho(\underline{r},t)=0$, $\underline{j}(\underline{r},t)=0$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2 \quad \left(= \frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2\right)$$

Mit Coulombeichung ($\nabla \cdot \underline{A} = 0$) können wir dann auch $\phi = 0$ setzen,
also $\underline{E} = -\dot{\underline{A}}$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \dot{\underline{A}}^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2} \quad (*)$$

Feldvariablen $A_k(\underline{r}, t)$ mit $k = x, y, z$

Lagrange-Gl.: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_k}{\partial x_j}} = 0$$

führt auf $$\boxed{\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0}$$ wie gefordert!

Potentialgleichung in der Coulombeichung

Definiere nun die kanonisch konjugierten Impulse

$$\Pi_{A_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} \overset{(*)}{=} \varepsilon_0 \dot{A}_k = -\varepsilon_0 E_k$$

Komponente des elektr. Feldes

$\Longrightarrow$ A_k und E_k sind kanonisch konjugierte Variablen
Diese sind zu quantisieren!

Hamiltondichte
$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{3} \dot{A}_k \Pi_{A_k} - \mathcal{L} \overset{(*)}{=} \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \varepsilon (\dot{A}_k)^2}_{\varepsilon_0 \dot{\underline{A}}^2} - \frac{\varepsilon}{2} \dot{\underline{A}}^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \dot{\underline{A}}^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{\varepsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2$$ mit $\underline{E} = \underline{E}(\underline{r}, t)$, $\underline{B} = \underline{B}(\underline{r}, t)$

Hamiltonfunktion
$H = \int d\underline{r}\, \mathcal{H}$

Konsistent mit klass. Elektrodynamik!

$$E = \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2 \right)$$

Quantisierung:

$$\hat{H} = \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{\hat{A}}(\underline{r},t) \right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\nabla \times \underline{\hat{A}}(\underline{r},t) \right)^2 \right)$$

Setze hier wieder den quantisierten Ausdruck für $\underline{\hat{A}}$ ein
(Ansatz aus Eigenmoden)

$$\Rightarrow \hat{H} = \sum_{\underline{k}} \hbar \omega_{\underline{k}} \left(\hat{N}_{\underline{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

entspricht dem früher hergeleiteten Ausdruck

$$\hat{N}_{\underline{k}} = \hat{a}^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}}$$

IV. 4. Kopplung zwischen Teilchen und Feldern

Zunächst: Erinnerung an 1 Punkt-Teilchen im elektromagnet. Feld
(nicht-relativistisch)

Lagrangefunktion. (Kein konservatives System!)

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2}_{\text{Kinet. Energie}} - q\phi(\underline{r},t) + q\,\dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r},t)$$

Lagrange-Gl.: $\displaystyle \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial L}{\partial r_k} \overset{!}{=} 0 \qquad k = 1,2,3$

$$\Rightarrow m \ddot{r}_k = q E_k(\underline{r},t) + q(\dot{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r},t))_k \qquad \text{mit} \quad \underline{B} = (\nabla \times \underline{A})$$

$$= F_k^{\text{Lorentz}} \qquad E_k = -\frac{\partial \phi}{\partial r_k} - \frac{\partial A_k}{\partial t}$$

Komponente der Lorentzkraft