Wh:

4-Komponent-Spinor

$$\underline{\Psi}_{p,\lambda}(r,t) \quad , \quad \lambda = + : \underline{\Psi}_{p,+1} = N \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \frac{c\hat{\sigma}\cdot p}{E_+ + m_0 c^2}\underline{\varphi}_1 \end{pmatrix} \times e^{-\frac{i}{\hbar}(E_+(p)t - p\cdot r)}$$

2-Komponent. Vektor

$\lambda = +, -$

positive Energie, negative Energie

$$E_\pm(p) = \underbrace{\pm}_{\lambda} c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

wähle: $\underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varepsilon = 1 \qquad \varepsilon = 2$

$(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ Pauli-Matrizen)

mit $$\hat{\underline{\sigma}}\cdot p = \begin{pmatrix} 0 & p_x \\ p_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ip_y \\ p_y i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_z & 0 \\ 0 & -p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

Nach Berechnung von N (aus $\Psi\Psi^* = 1$)

sind die Lösungen der Dirac-Gl. für das freie Teilchen festgelegt

<u>Explizit</u>

$$\underline{\Psi}_{p,\lambda=+,\varepsilon=1} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_+ + m_0 c^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E_+ + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_+ t - p\cdot r)}$$

$$\underline{\Psi}_{p,\lambda=+,\varepsilon=2} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{E_+ + m_0 c^2} \\ \frac{-cp_z}{E_+ + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_+ t - p\cdot r)}$$

$$\Psi_{\underline{p},\lambda=-1,\varepsilon=1} = N \begin{pmatrix} \frac{-cp_z}{-E_- + m_0c^2} \\ \frac{-c(p_x+ip_y)}{-E_- + m_0c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(-E_- t - \underline{p}\cdot\underline{r})}$$

$$-E_- = E_+$$

$$\Psi_{\underline{p},\lambda=-1,\varepsilon=2} = N \begin{pmatrix} \frac{-c(p_x-ip_y)}{-E_- + m_0c^2} \\ \frac{cp_z}{-E_- + m_0c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(-E_- t - \underline{p}\cdot\underline{r})}$$

Bemerkungen

a) Die Lösungen sind ebene Wellen, die durch drei Quantenzahlen charakterisiert sind

- Impuls $\underline{p}$ (kontinuierlich)
- Energie-Quantenzahl $\lambda = \pm 1$ (für jedes $\underline{p}$)

  oberer/unterer "Energiezweig"
- Quantenzahl $\varepsilon = 1, 2$ (für jedes λ)

Die 4 Spaltenvektoren sind orthogonal zueinander

b) Ein allgemeiner Spinor Ψ kann dargestellt werden als Überlagerung der 4 „Basisvektoren" (aufgrund der Linearität der Dirac-Gl. !)

c) Die $\Psi_{\underline{p},\lambda,\varepsilon}$ sind Eigenfunktionen zu

i) Dirac-Operator $\hat{H}_D$

dazugehörige Quantenzahl λ bzw. Energieeigenwert $E_\lambda(\underline{p})$ für festes $\underline{p}$

ii) Impulsoperator $\hat{\underline{p}}$

dazu gehört Quantenzahl p (Eigenwert p)

iii) "Weiterer Operator" (??)

dazu gehört: Quantenzahl ε (Eigenwert ?)

Idee: Die drei Operatoren bilden einen vollständigen Satz kommutierender Observablen

(ähnlich wie $\hat{H}, \hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_z$ beim Teilchen im Zentralpotential

nicht-relativistisch

$[\hat{H}, \hat{L}^2]=0$, $[\hat{H}, \hat{L}_z]=0$

$[\hat{L}^2, \hat{L}_z]=0$)

Quantenzahlen n, l, m

Frage: Was ist der "weitere Operator"?

d) Der gesuchte Operator ist der sogenannte „Helizitätsoperator" $\hat{\lambda}$ (großes Lambda)

Definition: $\hat{\lambda} = \hat{\underline{S}} \cdot \frac{\underline{p}}{|\underline{p}|}$ mit $\hat{\underline{S}}$ dreikomponentiger Vektor, dessen Komponenten 4x4 Matrizen sind

$$\hat{S}^i = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_i \end{pmatrix}$$

Pauli-Matrizen

$\hat{\lambda}$ ist also die Projektion des „Dirac-Spinoperators $\hat{\underline{S}}$") auf die Richtung des Impulses, d.h. die Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle

($\frac{\underline{p}}{|\underline{p}|}$: Einheitsvektor in Richtung von $\underline{p}$)

Es gilt:

- $[\hat{S}^i, \hat{S}^j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} \hat{S}^k$ $\Rightarrow$ $\hat{S}^i$ erfüllen die „fundamentalen Drehimpulsrelation"

- $[\hat{H}_D, \hat{\underline{S}}] = -i\hbar c(\underline{\hat{\alpha}} \times \underline{p})$ $\neq 0$

aber: $[\hat{H}_D, \hat{\Lambda}] = 0$, $[\hat{\Lambda}, \hat{\vec{p}}] = 0$

leicht zu zeigen über Matrixdarstellung von $\hat{H}_D$, $\hat{\Lambda}$

$$\hat{\Lambda} = \frac{\hbar}{2\underbrace{p}_{|\vec{p}|}} \left(\begin{array}{cc|c} p_z & p_x - ip_y & \\ p_x + ip_z & -p_z & 0 \\ \hline & 0 & \text{identisch} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \hat{\Lambda}$ ist ein Kandidat für den gesuchten "weiteren Operator", der mit $\hat{H}_D$ und $\hat{p}$ vertauscht, mit diesen Operatoren einen vollständigen Satz bildet und damit die Eigenzustände komplett klassifiziert

Berechne die Eigenwerte von $\hat{\Lambda}$

siehe oben

$$\hat{\Lambda} = \hat{\vec{S}} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\hbar}{2p} \left(\begin{array}{c|c} \text{s.o.} & 0 \\ \hline 0 & \text{s.o.} \end{array}\right)$$

$p = |\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$

charakteristisches Polynom

$$\Big(\frac{\hbar}{2p} p_z - \hbar \underbrace{\eta}_{\text{Eigenwert}}\Big)\Big(-\frac{\hbar}{2p} p_z - \hbar\eta\Big) - \Big(\frac{\hbar}{2p}\Big)^2 (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Big(\hbar^2 \eta^2 - \frac{\hbar^2}{(2p)^2} p_z^2\Big) - \frac{\hbar^2}{(2p)^2}\big(p_x^2 + p_y^2\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \hbar^2\eta^2 - \frac{\hbar^2}{2\cancel{p^2}} \cancel{p^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \hbar^2\eta^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von $\hat{\Lambda}$: $\hbar\eta = \pm \frac{\hbar}{2}$

Häufig: Umbenennung: $\eta \longrightarrow m_s = \pm \frac{1}{2}$

Interpretation:

Zu jeder Energie E_+ bzw E_- gibt es jeweils zwei Einstellmöglichkeiten des (Dirac-)Spins bezügl. der Impulsrichtung $\frac{p}{|p|}$

Insgesamt folgern wir:

Das relativistische Elektron hat neben der Masse m_0 und der Ladung $(-e_0)$ noch eine weitere "Teilcheneigenschaft", nämlich den "Spin" (Eigendrehimpuls) s

Diese Eigenschaft ist für alle Elektronen ($\lambda = \pm 1$, p, $m_s = \pm \frac{1}{2}$) gleich!

Denn:

$$\hat{\underline{S}}^2 = \hat{\underline{S}} \cdot \hat{\underline{S}} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\begin{pmatrix} (\sigma^x)^2 & 0 \\ 0 & (\sigma^x)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\sigma^y)^2 & 0 \\ 0 & (\sigma^y)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\sigma^z)^2 & 0 \\ 0 & (\sigma^z)^2 \end{pmatrix} \right)$$

es gilt $\hat{\sigma}^{i\,2} = \hat{1}$, $i = x, y, z$ $(1,2,3)$

$$\hat{\underline{S}}^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \hbar^2 s(s+1) \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boxed{s = \frac{1}{2}}$$ „Teilcheneigenschaft"

(analog Bahndrehimpuls: Quantenzahl l
Einstellmöglichkeiten m_l
$m_l = -l, \dots, l$

und $m_s = \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ man spricht von Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen!!

Beachte schließlich

man kann zeigen $[\hat{H}_D, \underline{\hat{L}}] \neq 0$ (und $[\hat{H}_D, \hat{\underline{S}}] \neq 0$)

(Bahndrehimpuls über $\underline{\hat{L}}$)

aber $\left[\hat{H}_D, \underbrace{\hat{\underline{L}} + \hat{\underline{S}}}\right] = 0$ (Gesamtdrehimpuls des Elektrons)

Die Summe aus Bahndrehimpuls und Spin vertauscht mit $\hat{H}_D$

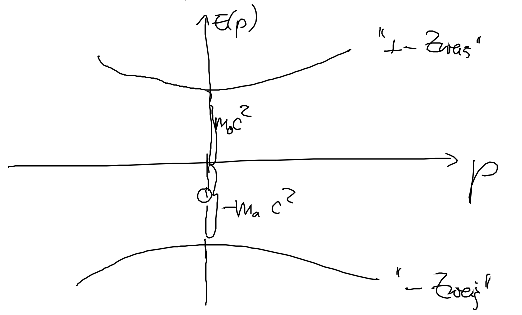
e) Energiespektrum des Dirac-Teilchens

Wir haben gesehen:

Wie bei der Klein-Gordon-Gl. gibt es auch im Rahmen der Dirac-Theorie Lösungen mit positiver und negativer Energie

$$E_\pm = \pm c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

Illustration des Energiespektrums



Energie-Lücke $\Delta = 2 m_0 c^2$

Jeder dieser Zweige ist 2 "Spinzuständen" ($m_s = \pm\frac{1}{2}$) "besetzt"!

Frage:
Können wir die Lösung mit E_- ignorieren?

Nein!
Denn: Beliebiger Spinor ist Überlagerung von den 4 Basisvektoren und kann damit auch Anteile mit negativen Energie enthalten!

(→ Zitterbewegung, s. Übungsblatt)

Ausserdem könnte man auf folgende Idee kommen:

Selbst wenn der Anfangszustand $\Psi(t=0)$ positive Energie hat, könnte es durch Wechselwirkung mit Strahlung Übergänge in Zustände mit negativer Energie kommen...

also: Ein Elektron aus dem "+-Zweig" zerfällt durch Aussenden eines Lichtquants ...

(Wären dann Atome/Moleküle überhaupt noch stabil ...?)

Dies wird aber nicht beobachtet!

Dirac's Idee (1930): "Dirac-See"

Im Grundzustand sind alle Zustände mit negativer Energie vollständig besetzt (Vakuumzustand)

Wegen des Pauli-Prinzips können Teilchen mit positiver Energie dann nicht in Zustände negativer Energie übergehen

(Pauli-Prinzip: Für Teilchen mit halbzahligem Spin (insbesondere auch Elektronen) kann jeder Quantenzustand nur einfach besetzt werden)!

Ein Problem an diesem Bild

Man hat offensichtlich implizit angenommen, dass es unendlich viele Teilchen gibt

Das zeigt: Dirac-Gl. ist eigentlich eine Vielteilchentheorie
($\rightarrow$ Quantenfeldtheorie)

(Einteilchenbild ist in diesem Sinne problematisch ...)

Experimentelle Beobachtung

Durch ein Lichtquant (Energie $\hbar\omega$, Impuls $p = \hbar k$)
kann ein Teilchen aus dem "E_--Zweig" ("Dirac-See")
in einen Zustand mit positiver Energie gehoben werden (angeregter Zustand)

Im Vergleich zum Vakuumzustand hat dieser Zustand dann eine positive Ladung und positive Energie

$\Rightarrow$ Erzeugung eines Positrons (Antiteilchen des Elektrons, selbe Ruhemasse wie das Elektron, aber positive Ladung)
und eines neuen Elektrons

Lichtquant $\curvearrowright$ $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$