Wh. Motivation Dirac-Gl.

- Diff.-gleichung erster Ordnung in der Zeit und im Raum

(KG-Gl. führt auf Interpretationsschwierigkeiten bei Dichte!)

(damit Lorentz-Invarianz gewährleistet ist)

- Beschreibung von Teilchen mit Spin, insbesondere $s=\frac{1}{2}$ (Elektron!)

relativist. Energie-Impuls-Beziehung muss (wie bei KG-Gleichung) berücksichtigt sein!

Ansatz:

$$\boxed{\begin{aligned} & i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi(t) \quad \leftarrow \text{Dirac-Operator} \\ & \text{mit } \hat{H}_D = \Big(\underset{\text{Lichtgeschwindigkeit}}{c}\, \hat{\alpha}^i \underbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_i}_{\hat{p}_i \text{ in der Ortsdarstellung}} + \hat{\beta} m_0 c^2 \Big) \end{aligned}} \quad (*)$$

$i = 1,2,3$ (x,y,z)

Man sieht sofort: (*) ist 1. Ordnung (Diff.gl.) in der Zeit und 1. Ordnung im Raum (denn $\hat{H}_D$ ist <u>linear</u> im Impulsoperator!)

Idee hinter (*):

Linearisiere die relativist. Energie-Impuls-Beziehung

klass: $E^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4 \iff E^2 - (c^2p^2 + m_0^2c^4) = 0 \underset{=0}{=} (E - cp - m_0c^2)(E + cp + m_0c^2)$

$(a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$

Ansatz für die Linearisierung:

$$(**) \quad \Big(E - c\sum_i \hat{\alpha}^i \hat{p}_i - \hat{\beta} m_0 c^2\Big)\Big(E + c\sum_j \hat{\alpha}^j \hat{p}_j + \hat{\beta} m_0 c^2\Big) \overset{!}{=} 0$$

führt auf die richtige Energie-Impuls-Relation falls bestimmte Anforderungen für die $\hat{\alpha}^i$, $\hat{\beta}$ gelten!

dazu später!

Betrachte nun von (**) den linken Faktor (falls dieser Null ist, ist (**) bereits erfüllt) und benutze:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \,, \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla \qquad \text{(Korrespondenzregel)}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - c\,\hat{\alpha}^i \frac{\hbar}{i}\partial_i \psi - \hat{\beta} m_0 c^2 \psi = 0 \quad \rightarrow (*)$$

Kompaktere Schreibweise:

$$\hat{H}_D = c\,\hat{\alpha}^i \frac{\hbar}{i}\partial_i + \hat{\beta} m_0 c^2 \qquad i = 1,2,3$$

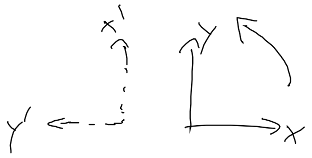
mit Einsteinscher Summenkonvention!

$$\Rightarrow \hat{H}_D = c\,\underline{\hat{\alpha}} \cdot \underbrace{\hat{p}}_{\text{3-dim. Impulsoperator}} + \hat{\beta} m_0 c^2 \qquad \underline{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$$

Frage: Was sind die Koeffizienten $\hat{\alpha}^i$ und $\hat{\beta}$?

Minimalforderung: $\hat{H}_D$ soll invariant gegen Drehungen sein

$\rightarrow$ $\hat{\alpha}^i$ können nicht einfach Zahlen



$$x' = y \qquad \Rightarrow \quad \partial_{x'} = \partial_y$$
$$y' = -x \qquad\quad \partial_{y'} = -\partial_x$$

Vorzeichenwechsel!

das muß kompensiert werden!

Daher nimmt man an (Dirac)

- die $\hat{\alpha}^i$ und $\hat{\beta}$ sind $N \times N$ Matrizen (damit enthält der 3-komponentige Vektor $\underline{\hat{\alpha}}$ Matrizen)
- die $\hat{\alpha}^i$ und $\hat{\beta}$ sind hermitesch

$\rightarrow$ dann ist der ganze Dirac-Operator hermitesch

(führt auf eine positive Dichte, wenn man die Kontinuitätsgleichung herleitet)

↳ auch $\hat{H}_D$ ist eine $N \times N$ Matrix (folgt aus der Struktur von $\hat{H}_D$)

⇒ ψ ist N-dim. Vektor, d.h. $\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ „Spinor"

Also:

Dirac-Gleichung ist eine Matrixgleichung für den Spinor $\underline{\psi}$

Genaue Form der Matrizen $\hat{\alpha}^i$ und $\hat{\beta}$?

Erinnerung: ~~Konsistenz~~ Forderung der mit der relativist. Energie-Impuls-Beziehung!

Wir fordern hier: Die Komponenten des Spinors $\underline{\psi}$ müssen die KG-Gleichung erfüllen. Denn dann ist die relativist. Energie-Impuls-Relation automatisch erfüllt.

Weg:

Wende die Dirac-Gl. zweimal hintereinander auf einen Spinor an.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t}\right) = \hat{H}_D\left(\hat{H}_D \underline{\psi}\right)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\psi} = \left(c\frac{\hbar}{i}\hat{\alpha}^i \partial_i + \hat{\beta} m_0 c^2\right)\left(c\frac{\hbar}{i}\hat{\alpha}^j \partial_j + \hat{\beta} m_0 c^2\right)\underline{\psi}$$

$i, j = 1,2,3$

$$= -\hbar^2 c^2 \hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\alpha}^j \partial_j \underline{\psi}$$
$$+ \frac{\hbar m_0 c^3}{i}\left(\hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\beta} + \hat{\beta}\, \hat{\alpha}^i \partial_i\right)\underline{\psi}$$
$$+ \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4 \underline{\psi}$$

Annahme: $\hat{\alpha}^i$ ortsunabhängig

Umschreibungen:

1. Term : Symmetrisieren: $\hat\alpha^i \partial_i \hat\alpha^j \partial_j = \hat\alpha^i \hat\alpha^j \partial_i \partial_j$

Einstein'sche Summenkonvention $= \frac{1}{2}(\hat\alpha^i \hat\alpha^j + \hat\alpha^j \hat\alpha^i)\partial_i \partial_j$

Annahme: $\hat\beta$ ortsunabhängig

2. Term: $\hat\alpha^i \partial_i \hat\beta + \hat\beta \hat\alpha^j \partial_j = (\hat\alpha^i \hat\beta + \hat\beta \hat\alpha^i)\partial_i$

$$\Rightarrow \underbrace{-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}_{\sim E^2\Psi} = -\frac{\hbar^2 c^2}{2}(\hat\alpha^i \hat\alpha^j + \hat\alpha^j \hat\alpha^i)\partial_i \partial_j \underline{\Psi}$$
$$+ \frac{\hbar m_0 c^3}{i}(\hat\alpha^i \hat\beta + \hat\beta \hat\alpha^i)\partial_i \underline{\Psi}$$
$$+ \hat\beta^2 m_0^2 c^4 \underline{\Psi} \quad \text{I}$$

$E \mathrel{\hat=} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$

$\hat{p} \mathrel{\hat=} \frac{\hbar}{i}\nabla_i$

$$\overset{!}{=} (\hat{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4)\underline{\Psi}$$
$$= (-\hbar^2 c^2 \partial_i^2 + m_0^2 c^4)\underline{\Psi} \quad \text{II}$$

Klein-Gordon-Gl. bzw. relativist. Energie-Impuls-Relation

Damit $\text{I} = \text{II}$ gilt, müssen wir fordern:

1. $\hat\alpha^i \hat\alpha^j + \hat\alpha^j \hat\alpha^i = 2\delta_{ij}\hat{1}$
2. $\hat\alpha^i \hat\beta + \hat\beta \hat\alpha^i = 0$
3. $\hat\beta^2 = \hat{1}$

muss gelten für alle $i, j = 1, 2, 3$

$\Rightarrow$ 1 und 2 sagen aus, dass die Matrizen $\hat\alpha^i, \hat\beta$ antikommutieren

$[\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$

beachte: Aus 1 folgt auch: $(j = i)$

$\hat\alpha^i \hat\alpha^i + \hat\alpha^i \hat\alpha^i = 2\hat{1} \Rightarrow \hat\alpha^{i\,2} = \hat{1}$

1*

Weitere Folgerungen aus ①, ②, ③

— aus ② : $\hat{\alpha}^i = -\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\hat{\beta}^{-1}$

— aus ③ : $\hat{\beta}^{-1} = \hat{\beta}$

a) Spur: $\mathrm{Sp}(\hat{\alpha}^i) = -\mathrm{Sp}(\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\hat{\beta}^{-1}) \overset{\text{Zykl.-Invarianz}}{=} -\mathrm{Sp}(\underbrace{\hat{\beta}^{-1}\hat{\beta}}_{\hat{\beta}^2 = \hat{1} \;③}\hat{\alpha}^i)$

$= -\mathrm{Sp}(\hat{\alpha}^i)$

$\Rightarrow \mathrm{Sp}(\hat{\alpha}^i) = 0$ (Spur $\hat{=}$ Summe der Eigenwerte)

$\Rightarrow$ Summe der Eigenwerte von $\hat{\alpha}^i$ muß Null sein!

b) Es gilt (1*), also $\hat{\alpha}^{i\,2} = \hat{1}$

$\Rightarrow$ Eigenwerte müssen gleich ± 1 sein

Kombiniere a) und b):

Die Dimension N der Matrizen muss gerade sein

(d.h. die Anzahl positiver und negativer Eigenwerte muß gleich sein!)

aber:

$N=2$ langt nicht aus, da man dann nicht genügend unabhängige Matrizen zur Erfüllung der Forderungen ①–③ hat

$\Rightarrow$ Die niedrigste mögliche Dimension von $\hat{\alpha}^i$ und $\hat{\beta}$ ist:

$N=4$

$\Rightarrow \hat{H}_D$ ist vierdimensional , $\underline{\Psi}$ ist 4-dimensionaler Spinor

Explizite Darstellung der "Dirac-Koeffizienten" $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$:

"Standard-Darstellung"

Pauli-Spinmatrizen (zweidimensional)

$$\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0_{2\times2} & \hat{\sigma}^i_{2\times2} \\ \hat{\sigma}^i_{2\times2} & 0_{2\times2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$i = 1,2,3$

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -\mathbb{1}_{2\times2} \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Pauli-Spinmatrizen

$$(\hat{\sigma}^i)^2 = \underline{\underline{1}} \;, \; [\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]_+ = 0 \;, \; [\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$$

Eigenwerte der $\hat{\sigma}_i$: $\lambda = \pm 1$

$\hat{\sigma}_i^+ = \hat{\sigma}_i$ (hermitesch!)

Erinnerung: die $\hat{\sigma}^i$ entsprechen Darstellung von Drehimpulsoperator $\hat{\vec{l}}$ mit $l = \frac{1}{2}$

allg.: $\hat{\vec{l}}^2 |l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle$

$\hat{l}_z |l,m\rangle = \hbar m |l,m\rangle$

$\hat{l}_x = \frac{1}{2}(\hat{l}_+ + \hat{l}_-)$, $\hat{l}_y = \frac{1}{2i}(\hat{l}_+ - \hat{l}_-)$: $\hat{l}_+, \hat{l}_-$ Leiteroperatoren

z.B. $\hat{l}_+ |l,m\rangle = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,|l,m+1\rangle$

Speziell $l=\frac{1}{2}$: $\quad \hat{l}^2 |\tfrac{1}{2}, m\rangle = \tfrac{3}{4}\hbar^2 |\tfrac{1}{2} m\rangle$ mit $m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$\hat{l}_z |\tfrac{1}{2}, m\rangle = \frac{\hbar}{2} |\tfrac{1}{2}, m\rangle$ (für $m = \frac{1}{2}$)

$!$

Matrixdarstellungen von $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ für $l=\frac{1}{2}$ in den Eigenzuständen $|l,m\rangle$ führen auf die Pauli-Spinmatrizen!

$$\text{z.B. } \hat{l}_x = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}^1$$

Zurück zum Dirac-Operator

$$\hat{H}_D = c\,\underline{\hat{\alpha}} \cdot \hat{\underline{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2 \quad \left(= c\hat{\alpha}^1 \hat{p}_1 + c\hat{\alpha}^2 \hat{p}_2 + c\hat{\alpha}^3 \hat{p}_3\right) + \hat{\beta} m_0 c^2$$

Einsetzen der Ergebnisse für $\hat{\alpha}^i$ und $\hat{\beta}$
(Standard-Darstellung)

$$\Rightarrow \hat{H}_D = \left(\begin{array}{cc|cc} m_0 c^2 & 0 & cp_z & c(p_x - ip_y) \\ 0 & m_0 c^2 & c(p_x + ip_y) & -cp_z \\ \hline cp_z & c(p_x - ip_y) & -m_0 c^2 & 0 \\ c(p_x + ip_y) & -cp_z & 0 & -m_0 c^2 \end{array}\right) \qquad 4\times 4 \text{ Matrix}$$

Dirac-Gleichung in kovarianter Form

wir haben bereits gesehen: Dirac-Gl. ist erster Ordnung in der Zeit und im Ort
(Linearität im Impuls)

$\Rightarrow$ Raum-Zeit-Symmetrie ist schon mal gewährleistet!

Multiplizieren die Dirac-Gl. zunächst mit $\frac{1}{c}\hat{\beta}$ (von links)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi$$

$$\left(i\hbar \frac{1}{c}\hat{\beta}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c}\hat{\beta}\left(c\,\underline{\hat{\alpha}} \cdot \underline{p} + \hat{\beta} m_0 c^2\right)\right)\underline{\psi} = 0$$

mit $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$ $\quad \mu = 0,1,2,3$ und $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla = -i\hbar\nabla$

$$\Rightarrow \left(i\hbar\hat{\beta}\partial_0 + i\hbar\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\partial_i - \underbrace{\hat{\beta}^2}_{\hat{1}} m_0 c\right)\underline{\psi} = 0 \qquad i = 1,2,3$$

$$\Leftrightarrow \left(-i\hbar\left(\hat{\beta}\partial_0 + \hat{\beta}\hat{\alpha}^i\partial_i\right) + m_0 c\hat{1}\right)\underline{\psi} = 0$$

Definiere nun neue Dirac-Matrizen:

$$\left.\begin{aligned} \gamma^0 &= \hat{\beta} \\ \hat{\gamma}^i &= \hat{\beta}\hat{\alpha}^i \end{aligned}\right\}$$ bilden den 4-Vektor $\underline{\hat{\gamma}}$

(wobei die Einträge wieder 4-dim. Matrizen sind!)

und dividiere durch $\hbar$

$$\Leftrightarrow \left(-i\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\psi} = 0$$