Whs.
Dirac-Gl. in kovarianter Form

$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_D \Psi(t)$ — Spinor (4-komponentiger Vektor)

$\hat{H}_D$ — Dirac-Operator (4×4 Matrix) $\quad \hat{H}_D = c\hat{\underline{\alpha}}\cdot \underline{p} + \hat{\beta} m_0 c^2$

⋮

$$\Leftrightarrow \left(-i\hbar\left(\hat{\beta}\partial_0 + \hat{\beta}\hat{\alpha}^i \partial_i\right) + m_0 c \hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0 \qquad (**)$$

$i=1,2,3$

$$\partial_\mu = \Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \underbrace{\nabla}_{\partial_1,\partial_2,\partial_3}\Big)$$

Definiere die „Dirac-Matrizen"

$$\left.\begin{aligned}\hat{\gamma}^0 &= \hat{\beta}\\ \hat{\gamma}^i &= \hat{\beta}\hat{\alpha}^i \quad i=1,2,3\end{aligned}\right\}$$ bildet den 4-Vektor $\underline{\hat{\gamma}}$

die Einträge sind 4×4 Matrizen

$$\hat{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{1}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^i \\ -\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_i & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{aus } (**) \quad \left(-i\hbar\left(\hat{\gamma}^0\partial_0 + \hat{\gamma}^i\partial_i\right) + m_0 c\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0 \quad \Big| : \hbar$$

$$\Leftrightarrow \Big(-i\underbrace{\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu}_{\text{Skalarprodukt von 4-Vektoren}} + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\Big)\underline{\Psi} = 0 \qquad \mu = 0,1,2,3$$

Lorentzinvariant!

Verwende manchmal verkürzte Schreibweise (Feynman)

$$\not{\partial} = \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu$$

$$\rightarrow \boxed{\left(-i\not{\partial} + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0}$$ Kovariante Form der Dirac-Gl.

Im Gegensatz zur KG-Gleichung tauchen nur erste Ableitungen

Kontinuitätsgleichung und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Zurück zur "alten" Form der Dirac-Gl.

$$i\hbar \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial t} = \hat{H}_D \underline{\Psi} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_D = c \underbrace{\hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{p}}}_{\hat{\alpha}^i \hat{p}_i} + \hat{\beta} m_0 c^2$$

multipliziere von links mit dem adjungierten Spinor (Zeilenvektor)

$$\underline{\Psi}^+ = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*)$$

$$\Rightarrow \quad (1) \quad i\hbar \underline{\Psi}^+ \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial t} = c \underline{\Psi}^+ \hat{\alpha}^i \hat{p}_i \underline{\Psi} + m_0 c^2 \underline{\Psi}^+ \hat{\beta} \underline{\Psi}$$

Umgekehrt:

nehme adjungierte Dirac-Gl. und multipliziere von rechts mit $\underline{\Psi}$

adjungierte Dirac-Gl.:

$$-i\hbar \partial_t \underline{\Psi}^+ = c \left(\hat{\alpha}^i \hat{p}_i \underline{\Psi} \right)^+ + \left(\hat{\beta} \underline{\Psi} \right)^+ m_0 c^2$$

$$= c (\hat{p}_i \underline{\Psi})^+ (\hat{\alpha}^i)^+ + \underline{\Psi}^+ \hat{\beta}^+$$

benutze $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$

multipliziere von rechts mit $\underline{\Psi}$

$$(2) \quad \left(-i\hbar \frac{\partial \underline{\Psi}^+}{\partial t} \right) \underline{\Psi} = c (\hat{p}_i \underline{\Psi})^+ (\hat{\alpha}^i)^+ \underline{\Psi} + \underline{\Psi}^+ \hat{\beta}^+ \underline{\Psi} m_0 c^2$$

bilde Differenz (1) − (2)

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\Psi}^+ \underline{\Psi}) = c \left(\underline{\Psi}^+ \hat{\alpha}^i \hat{p}_i \underline{\Psi} - (\hat{p}_i \underline{\Psi})^+ (\hat{\alpha}^i)^+ \underline{\Psi} \right)$$
$$+ m_0 c^2 \left(\underline{\Psi}^+ \hat{\beta} \underline{\Psi} - \underline{\Psi}^+ \hat{\beta}^+ \underline{\Psi} \right)$$

rechte Seite:

ersetze $\hat{p}_i \rightarrow \frac{\hbar}{i}\partial_i \qquad i=1,2,3$

$$(\hat{p}_i \Psi)^\dagger = -\frac{\hbar}{i}\partial_i \Psi^\dagger$$

benutze $(a\hat{A})^\dagger = a^* \hat{A}^\dagger$

und benutze, dass die $\hat{\alpha}^i$ ortsunabhängig

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^\dagger \Psi) = c\frac{\hbar}{i}\left(\Psi^\dagger \hat{\alpha}^i \partial_i \Psi + (\partial_i \Psi^\dagger)(\hat{\alpha}^i)^\dagger \Psi\right) + m_0 c^2 \left(\Psi^\dagger \hat{\beta} \Psi - \Psi^\dagger \hat{\beta}^\dagger \Psi\right)$$

Fordere nun, dass $\hat{\alpha}^i$ und $\hat{\beta}$ hermitesch sind
(das ist bei Standarddarstellung schon erfüllt)

$\hat{\beta}$ hermitesch $\rightarrow$ letzter Term hebt sich heraus

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^\dagger \Psi) = -c\, \partial_i (\Psi^\dagger \hat{\alpha}^i \Psi)$$

$$\boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^\dagger \Psi) + \partial_i(\Psi^\dagger \hat{\alpha}^i \Psi) = 0} \quad (*)$$

Das hat genau die Form einer Kontinuitätsgleichung!

$\partial_\mu j^\mu = 0$ (analog zur klass. E-Dynamik und Klein-Gordon-Theorie)

mit $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$

Viererstrom (ablesen aus (*))

zeitl. Komponente $j^0 = c\rho$ mit $\rho = \Psi^\dagger \Psi$

räuml. Komponente $j^i = c\, \Psi^\dagger \hat{\alpha}^i \Psi$

Interpretation:
$$\rho = \Psi^+ \cdot \Psi = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$
$$= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$
$$\geq 0$$ kann nicht negativ werden!

ρ läßt sich als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren!

Lösungen der Dirac-Gl. (freies Teilchens)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H}_D \Psi \quad , \quad \hat{H}_D = c\hat{\underline{\alpha}} \hat{\underline{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2$$

Dirac-Operator für freies Teilchen

benutze zunächst
$$[\hat{H}_D, \hat{\underline{p}}] = 0 \quad \text{für freies Teilchen!}$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\text{Eigenfunktion von } \hat{\underline{p}}}_{A e^{i/\hbar \underline{p}\cdot\underline{r}}}$ sind auch Eigenfunktion von $\hat{H}_D$

(denn es gilt: $\hat{\underline{p}}(A e^{i/\hbar \underline{p}\cdot\underline{r}}) \overset{\text{Ortsdarstellung}}{=} \frac{\hbar}{i}\nabla (A e^{i/\hbar \underline{p}\cdot\underline{r}})$
$$= \underline{p} \, A e^{i/\hbar \underline{p}\cdot\underline{r}} \quad \checkmark$$

beachte: A kann auch Funktion von $\underline{p}$ (und E) sein, da $\hat{\underline{p}}$ nur auf den Ort wirkt

$\Rightarrow$ Ansatz für Spinor

$$\boxed{\Psi(\underline{r},t) = \underbrace{\Psi^0(E,\underline{p})}_{\text{Vierkomponentiger Vektor}} e^{-i/\hbar E t} \, e^{i/\hbar \underline{p}\cdot\underline{r}}}$$

Einsetzen in Dirac-Gl.

Dirac-Matrizen

in der Form $\left(-i\,\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0$ (*)

$$\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^i = \begin{pmatrix} \underline{0} & \hat{\underline{\sigma}}^i \\ -\hat{\underline{\sigma}}^i & \underline{0} \end{pmatrix} = (\hat{\beta}\hat{\alpha}^i)$$

beachte

$$\partial_0 \Psi(\underline{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\underline{r},t) = -\frac{i}{c\hbar}E\,\Psi(\underline{r},t)$$

$$\partial_i \Psi(\underline{r},t) = \frac{i}{\hbar}p_i\,\Psi(\underline{r},t)$$

Impulskomponente, kein Operator mehr!

Setze im Folgenden: $\underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix}$ mit $\underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, $\underline{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

4-Komponentig

Zweikomponentige Vektoren

Setze alles in (*) ein

$$-\frac{1}{c\hbar}E\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ -\underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} \underline{0} & \hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} \\ -\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} & \underline{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \frac{m_0 c}{\hbar}\begin{pmatrix} \hat{\underline{1}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \hat{\underline{1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = 0$$

mit $\hat{\underline{\sigma}} = (\hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}^3)$

jede Komponente ist 2x2 Matrix!

$$\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} = \underbrace{\hat{\sigma}^1 p_1 + \hat{\sigma}^2 p_2 + \hat{\sigma}^3 p_3}_{2\times 2 \text{ Matrix}} \quad \left(= \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \right)$$

$$E\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ -\underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \underline{0} & \hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} \\ -\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} & \underline{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + m_0 c^2\begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = 0$$

ergibt lineares Gleichungssystem!

① $E\varphi_1 = c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}\,\varphi_2 + m_0c^2\varphi_1$

② $-E\varphi_2 = -c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}\,\varphi_1 + m_0c^2\varphi_2$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} (E-m_0c^2)\underline{1} & -c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} \\ \hline -c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} & (E+m_0c^2)\underline{1} \end{array}\right)\begin{pmatrix}\underline{\varphi_1}\\ \underline{\varphi_2}\end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Damit Lösung existiert muß Koeffizientendeterminante verschwinden

$$(E-m_0c^2)(E+m_0c^2)\underline{1}_{2\times2} - c^2(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p})(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}) = 0$$

hier bei wurde (*) als 2x2 System aufgefaßt

benutzen (hier ohne Beweis → Übung)

$$(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{A})(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{B}) = \underline{A}\cdot\underline{B}\,\underline{1} + i\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot(\underline{A}\times\underline{B})$$

hier: $\underline{A} = \underline{B} = \underline{p}$

$$\Rightarrow (\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p})(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}) = p^2\,\underline{1}$$

$$\Rightarrow \left((E-m_0c^2)(E+m_0c^2) - c^2p^2\right)\underline{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E^2 - m_0^2c^4 - c^2p^2 = 0}$$

Das ist die relativistische Energie-Impuls Relation!

Das ist auch klar, weil der Dirac-Operator gerade so konstruiert wurde!

Zwei mögliche Energiezweige

$$E_\lambda(p) = \lambda c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}\,, \quad \lambda = \pm 1$$

mit $\lambda = \pm 1$

Es tauchen wieder (wie bei KG-Theorie) positive und negative Energiewerte auf!

Beachte: Jeder dieser Energiewerte ist 2-fach entartet, da Gleichung (*) eigentlich 4x4 Gleichung ist!

Ausserdem: Diese Energieeigenwerte hätten wir auch direkt aus der Diagonalisierung der Matrix $\hat{H}_D$ erhalten können

$\Rightarrow$ E_λ sind die Eigenwerte von $\hat{H}_D$

Weitere Folgerung aus (*)

$$(E_\lambda - m_0 c^2)\underline{\varphi}_1 - c\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}\,\underline{\varphi}_2 = 0$$

$$-c\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}\,\underline{\varphi}_1 + (E_\lambda + m_0 c^2)\underline{\varphi}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{(a)} \quad \underline{\varphi}_1 = \frac{c\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_\lambda - m_0 c^2}\,\underline{\varphi}_2$$

$$\text{(b)} \quad \underline{\varphi}_2 = \frac{c\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_\lambda + m_0 c^2}\,\underline{\varphi}_1$$

Relationen zwischen $\underline{\varphi}_1$ und $\underline{\varphi}_2$

Wir wollen, dass unsere Lösung sei $\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix}$ auch den Spezialfall $\underline{p}=0$ enthält. Für $\underline{p}=0$ gilt $E_{\lambda=+1} = m_0 c^2$, $E_{\lambda=-1} = -m_0 c^2$

Um in (a) ~~und~~ bzw. (b) nicht durch Null zu dividieren, benutzen wir (b) für den Fall $\lambda = +1$ und (a) für den Fall $\lambda = -1$

Gesamt-Spinor für den Fall $\lambda = 1$ (benutze also ⓑ)

$$\underline{\psi}_{p,\lambda=+1} = \underbrace{N_+}_{\text{Normierungsfaktor}} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \frac{c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_+ + m_0c^2}\,\underline{\varphi}_1 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E_{\lambda=+1}(\underline{p})t - \underline{p}\cdot\underline{r}\right)}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{entsprechend für } \lambda = -1 \\ \underline{\psi}_{p,\lambda=-1} = N_- \begin{pmatrix} \frac{-c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{-E_- + m_0c^2}\,\underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} \\ \times e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E_- t + \underline{p}\cdot\underline{r}\right)}\end{gathered}}$$

Man sieht:

$\underline{\psi}$ ist Vierervektor, jede Komponente entspricht einer ebenen Welle

Der Zweiervektor $\underline{\varphi}_1$ (bzw. $\underline{\varphi}_2$) ist aber noch unbestimmt

Wir machen zur endgültigen Festlegung dieser Vektoren folgende Überlegungen

- Wir wollen am Ende vier orthogonale Vektoren $\underline{\psi}$ haben (zu einem Impuls $\underline{p}$)
- In jedem Fall soll der gesamte Vektor $\underline{\psi}$ normiert sein

($\hookrightarrow$ Wahrscheinlichkeitsinterpretation!
$\int d\underline{r}\, |\underline{\psi}|^2 = 1$)

$\underline{\varphi}_1$ und $\underline{\varphi}_2$ sind Zweier-Vektoren

$\rightarrow$ können dargestellt werden bzgl. der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einheitsvektoren für 2-dim. Raum

Führe: $\underline{\chi}_\varepsilon$ mit $\varepsilon = 1, 2$

$\underline{\chi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\chi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ε spielt später die Rolle einer weiteren Quantenzahl, so wie $\underline{p}$, λ !)

$\Rightarrow$ Gesamtspinor für $\lambda = 1$:

$$\underline{\Psi}_{p,\lambda,\varepsilon}(\underline{r},t) = N_+ \begin{pmatrix} \underline{\chi}_\varepsilon \\ \frac{c\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_+ + m_0c^2}\underline{\chi}_\varepsilon \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_+(p)t - \underline{p}\cdot\underline{r})}$$

Normierung:

es ergibt sich

$$\underline{\Psi}\cdot\underline{\Psi}^+ = N_+^2\left(1 + \left(\frac{c\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_+ + m_0c^2}\right)^2\right) \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \text{Daraus } N_+$$

Der Normierungsfaktor von ε !