Wdh:
Dirac-Gl. in kovarianter Form

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_D \underline{\Psi}(t)$$

Spinor (4-komponentiger Vektor)

Dirac-Operator (4×4 Matrix)

$$\hat{H}_D = c\,\hat{\underline{\alpha}}\cdot\underline{p} + \hat{\beta} m_0 c^2$$

⋮

$$\Leftrightarrow \left(-i\hbar\,(\hat{\beta}\partial_0 + \underbrace{\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\partial_i}_{i=1,2,3}) + m_0 c\,\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0 \qquad (**)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \underbrace{\nabla}_{\partial_1,\partial_2,\partial_3}\right)$$

Definiere die „Dirac-Matrizen"

$$\left.\begin{aligned} \hat{\gamma}^0 &= \hat{\beta} \\ \hat{\gamma}^i &= \hat{\beta}\hat{\alpha}^i \qquad i=1,2,3 \end{aligned}\right\}$$ bildet den 4-Vektor $\underline{\hat{\gamma}}$, die Einträge sind 4×4 Matrizen.

$$\hat{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{1}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^i \\ -\underline{\underline{\hat{\sigma}}}_i & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{aus } (**) \quad \left(-i\hbar\,(\hat{\gamma}^0\partial_0 + \hat{\gamma}^i\partial_i) + m_0 c\,\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0 \qquad \Big|\, :\hbar$$

$$\Leftrightarrow \left(-i\,\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0 \qquad \mu = 0,1,2,3$$

Skalarprodukt von 4-Vektoren

Lorentzinvariant!

Verwende manchmal verkürzte Schreibweise (Feynman)

$$\not{\partial} = \hat{\gamma}^\mu\partial_\mu$$

$$\rightarrow \boxed{\left(-i\not{\partial} + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0}$$ Kovariante Form der Dirac-Gl.

Im Gegensatz zur KG-Gleichung tauchen nur erste Ableitungen

Kontinuitätsgleichung und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Zunächst zur "alten" Form der Dirac-Gl.

$$i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = \hat{H}_D \underline{\psi} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_D = c\underbrace{\hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{p}}}_{\hat{\alpha}^i \hat{p}_i} + \hat{\beta} m_0 c^2$$

multipliziere von links mit dem adjungierten Spinor (Zeilenvektor)

$$\underline{\psi}^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

$$\Rightarrow \quad (1) \quad i\hbar \underline{\psi}^+ \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = c\,\underline{\psi}^+ \hat{\alpha}^i \hat{p}_i \underline{\psi} + m_0 c^2 \underline{\psi}^+ \hat{\beta} \underline{\psi}$$

umgekehrt:

nehme adjungierte Dirac-Gl. und multipliziere von rechts mit $\underline{\psi}$

adjungierte Dirac-Gl.:

$$-i\hbar \partial_t \underline{\psi}^+ = c\left(\hat{\alpha}^i \hat{p}_i \underline{\psi}\right)^+ + \left(\hat{\beta}\underline{\psi}\right)^+ m_0 c^2$$

$$= c\,(\hat{p}_i \underline{\psi})^+ (\hat{\alpha}^i)^+ + \underline{\psi}^+ \hat{\beta}^+$$

benutze $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$

multipliziere von rechts mit $\underline{\psi}$

$$(2) \quad \left(-i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}^+}{\partial t}\right) \underline{\psi} = c\,(\hat{p}_i \underline{\psi})^+ (\hat{\alpha}^i)^+ \underline{\psi} + \underline{\psi}^+ \hat{\beta}^+ \underline{\psi}\, m_0 c^2$$

bilde Differenz (1) − (2)

$$\rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\psi}^+ \underline{\psi}) = c\left(\underline{\psi}^+ \hat{\alpha}^i \hat{p}_i \underline{\psi} - (\hat{p}_i \underline{\psi})^+ (\hat{\alpha}^i)^+ \underline{\psi} \right)$$

$$+ m_0 c^2 \left(\underline{\psi}^+ \hat{\beta} \underline{\psi} - \underline{\psi}^+ \hat{\beta}^+ \underline{\psi} \right)$$

rechte Seite:

ersetze $\hat{p}_i \to \frac{\hbar}{i}\partial_i \qquad i=1,2,3$

$$(\hat{p}_i \Psi)^+ = -\frac{\hbar}{i}\partial_i \Psi^+$$

benutze $(a\hat{A})^+ = a^* \hat{A}^+$

und benutze, dass die $\hat{\alpha}^i$ ortsunabhängig

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^+\Psi) = c\frac{\hbar}{i}\left(\Psi^+\hat{\alpha}^i\partial_i\Psi + (\partial_i\Psi^+)(\hat{\alpha}^i)^+\Psi\right.$$

$$\left. + m_0c^2(\Psi^+\hat{\beta}\Psi - \Psi^+\hat{\beta}^+\Psi\right)$$

Fordere nun, dass $\hat{\alpha}^i$ und $\hat{\beta}$ hermitesch sind

(das ist bei Standarddarstellung schon erfüllt)

$\hat{\beta}$ hermitesch $\to$ letzter Term hebt sich heraus

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^+\Psi) = -c\,\partial_i(\Psi^+\hat{\alpha}^i\Psi)$$

$$\boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^+\Psi) + \partial_i(\Psi^+\hat{\alpha}^i\Psi) = 0} \quad (*)$$

Das hat genau die Form einer Kontinuitätsgleichung!

$\partial_\mu j^\mu = 0$ (analog zur klass. E-Dynamik und Klein-Gordon-Theorie)

mit $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$

Viererstrom (ablesen aus $(*)$)

zeitl. Komponente $j^0 = c\rho$ mit $\rho = \Psi^+\Psi$

räuml. Komponente $j^i = c\,\Psi^+\hat{\alpha}^i\Psi$

Interpretation:
$$\rho = \underline{\Psi}^{+} \cdot \underline{\Psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$
$$= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$
$$\geq 0$$
kann nicht negativ werden!

ρ läßt sich als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren!

Lösungen der Dirac-Gl. (freies Teilchens)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Psi} = \hat{H}_D \underline{\Psi} \quad , \quad \hat{H}_D = c \hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2$$
Dirac-Operator für freies Teilchen

benutze zunächst
$$[\hat{H}_D, \hat{\underline{p}}] = 0 \quad \text{für freies Teilchen!}$$

$\Rightarrow$ Eigenfunktion von $\hat{\underline{p}}$ sind auch Eigenfunktion von $\hat{H}_D$
$$A e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p} \cdot \underline{r}}$$

(denn es gilt: $\hat{\underline{p}} (A e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p} \cdot \underline{r}}) \overset{\text{Ortsdarstellung}}{=} \frac{\hbar}{i} \nabla (A e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p} \cdot \underline{r}})$
$$= \underline{p} A e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p} \cdot \underline{r}} \quad \checkmark$$

beachte: A kann auch Funktion von $\underline{p}$ (und E) sein, da $\hat{\underline{p}}$ nur auf den Ort wirkt

$\Rightarrow$ Ansatz für Spinor
$$\boxed{\underline{\Psi}(\underline{r}, t) = \underbrace{\underline{\Psi}^0(E, \underline{p})}_{\text{Vierkomponentiger Vektor}} e^{-\frac{i}{\hbar} E t} e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p} \cdot \underline{r}}}$$

Einsetzen in Dirac-Gl.

in der Form $\left(-i\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0$ (*)

Dirac-Matrizen

$$\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^i = \begin{pmatrix} \underline{0} & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & \underline{0} \end{pmatrix} = (\hat{\beta}\hat{\alpha}^i)$$

beachte $\partial_0 \underline{\Psi}(\underline{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{\Psi}(\underline{r},t) = -\frac{i}{c\hbar} E\,\underline{\Psi}(\underline{r},t)$

$\partial_i \underline{\Psi}(\underline{r},t) = \frac{i}{\hbar} p_i \underline{\Psi}(\underline{r},t)$

Impulskomponente, kein Operator mehr!

Setze im Folgenden: $\underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix}$ mit $\underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$, $\underline{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$

4-Komponentig

Zweikomponentige Vektoren

Setze alles in (*) ein

$$-\frac{1}{c\hbar}E\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ -\underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} \underline{0} & \hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} \\ -\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} & \underline{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \frac{m_0 c}{\hbar}\begin{pmatrix} \hat{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \hat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = 0$$

mit $\hat{\underline{\sigma}} = (\hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}^3)$

jede Komponente ist 2x2 Matrix!

$$\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} = \underbrace{\hat{\sigma}^1 p_1 + \hat{\sigma}^2 p_2 + \hat{\sigma}^3 p_3}_{2\times 2\text{ Matrix}} \left(= \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \right)$$

$$E\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ -\underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \underline{0} & \hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} \\ -\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} & \underline{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + m_0 c^2\begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = 0$$

ergibt lineares Gleichungssystem!

① $E\varphi_1 = c\,\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{p}\,\varphi_2 + m_0c^2\varphi_1$

② $-E\varphi_2 = -c\,\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{p}\,\varphi_1 + m_0c^2\underline{\varphi_2}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} (E-m_0c^2)\underline{\underline{1}} & -c\,\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{p} \\ \hline -c\,\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{p} & (E+m_0c^2)\underline{\underline{1}} \end{array}\right)\begin{pmatrix}\underline{\varphi_1}\\ \underline{\varphi_2}\end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Damit Lösung existiert muß Koeffizientendeterminante verschwinden

$$(E-m_0c^2)(E+m_0c^2)\underline{\underline{1}}_{2\times2} - c^2(\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{p})(\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{p}) = 0$$

hier bei wurde (*) als 2x2 System aufgefaßt

benutzen (hier ohne Beweis → Übung)

$$(\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{A})(\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{B}) = \underline{A}\cdot\underline{B}\,\underline{\underline{1}} + i\,\underline{\hat{\sigma}}\cdot(\underline{A}\times\underline{B})$$

hier: $\underline{A} = \underline{B} = \underline{p}$

$$\Rightarrow (\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{p})(\underline{\hat{\sigma}}\cdot\underline{p}) = p^2\,\underline{\underline{1}}$$

$$\Rightarrow \left((E-m_0c^2)(E+m_0c^2) - c^2p^2\right)\underline{\underline{1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E^2 - m_0^2c^4 - c^2p^2 = 0}$$

Das ist die relativistische Energie-Impuls Relation!

Das ist auch klar, weil der Dirac-Operator gerade so konstruiert wurde!

Zwei mögliche Energiezweige

$$E_\lambda(p) = \lambda\, c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}, \quad \lambda = \pm 1$$

mit $\lambda = \pm 1$

Es tauchen wieder (wie bei KG-Theorie) positive und negative Energiewerte auf!

Beachte: Jeder dieser Energiewerte ist 2-fach entartet, da Gleichung (*) eigentlich 4x4 Gleichung ist!

Außerdem: Diese Energieeigenwerte hätten wir auch direkt aus der Diagonalisierung der Matrix $\hat{H}_D$ erhalten können

$\Rightarrow E_\lambda$ sind die Eigenwerte von $\hat{H}_D$

Weitere Folgerungen aus (*)

$$(E_\lambda - m_0 c^2)\underline{\varphi}_1 - c\hat{\underline{\sigma}}\cdot p\, \underline{\varphi}_2 = 0$$

$$-c\hat{\underline{\sigma}}\cdot p\, \underline{\varphi}_1 + (E_\lambda + m_0 c^2)\underline{\varphi}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{(a)} \quad \underline{\varphi}_1 = \frac{c\hat{\underline{\sigma}}\cdot p}{E_\lambda - m_0 c^2}\underline{\varphi}_2$$

$$\text{(b)} \quad \underline{\varphi}_2 = \frac{c\hat{\underline{\sigma}}\cdot p}{E_\lambda + m_0 c^2}\underline{\varphi}_1$$

Relationen zwischen $\underline{\varphi}_1$ und $\underline{\varphi}_2$

Wir wollen, dass unsere Lösung sei $\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix}$ auch den Spezialfall $p = 0$ enthält. Für $p = 0$ gilt $E_{\lambda=+1} = m_0 c^2$, $E_{\lambda=-1} = -m_0 c^2$

Um in (a) ~~und~~ bzw. (b) nicht durch Null zu dividieren,

benutzen wir (b) für den Fall $\lambda = +1$ und (a) für den Fall $\lambda = -1$

Gesamt-Spinor für den Fall $\lambda=1$ (benutze also (b))

$$\underline{\Psi}_{p,\lambda=+1} = N_+ \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \frac{c\hat{\sigma}\cdot p}{E_+ + m_0c^2}\,\underline{\varphi}_1 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{\lambda=+1}(p)t - p\cdot \underline{r})}$$

N_+: Normierungsfaktor

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{entsprechend für } \lambda=-1 \\ \underline{\Psi}_{p,\lambda=-1} = N_- \begin{pmatrix} \frac{-c\hat{\sigma}\cdot p}{-E_- + m_0c^2}\,\underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} \times e^{-\frac{i}{\hbar}(E_- t + p\cdot \underline{r})}\end{array}}$$

Man sieht:

$\underline{\Psi}$ ist Vierervektor, jede Komponente entspricht einer ebenen Welle

Der Zweiervektor $\underline{\varphi}_1$ (bzw. $\underline{\varphi}_2$) ist aber noch unbestimmt

Wir machen zur endgültigen Festlegung dieser Vektoren folgende Überlegungen

- Wir wollen am Ende vier orthogonale Vektoren $\underline{\Psi}$ haben (zu einem Impuls p)
- In jedem Fall soll der gesamte Vektor $\underline{\Psi}$ normiert sein

($\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsinterpretation!
$\int d\underline{r}\, |\underline{\Psi}|^2 = 1$)

$\underline{\varphi}_1$ und $\underline{\varphi}_2$ sind Zweier-Vektoren

$\rightarrow$ Können dargestellt werden bzgl. der Basis $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Einheitsvektoren für 2-dim. Raum

Führe: $\underline{\chi}_\varepsilon$ mit $\varepsilon = 1,2$

$$\underline{\chi}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\chi}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

(ε spielt später die Rolle einer weiteren Quantenzahl, so wie p, λ !)

$\Rightarrow$ Gesamtspinor für $\lambda = 1$:

$$\underline{\Psi}_{p,\lambda,\varepsilon}(\underline{r},t) = N_+ \begin{pmatrix} \underline{\chi}_\varepsilon \\ \frac{c\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_+ + m_0c^2}\,\underline{\chi}_\varepsilon \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_+(p)t - \underline{p}\cdot\underline{r})}$$

Normierung:

es ergibt sich

$$\underline{\Psi}\cdot\underline{\Psi}^+ = N_+^2\left(1 + \left(\frac{c\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_+ + m_0c^2}\right)^2\right) \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \text{Daraus } N_+$$

Der Normierungsfaktor von ε !