Wh:
Ladungsinterpretation der KG-Gleichung

aus Kontinuitätsgleichung : $\rho(\underline{r},t) = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^* \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial t}}_{\dot\psi} - \psi \underbrace{\frac{\partial\psi^*}{\partial t}}_{\dot\psi^*}\right)$

Kann negativ!

(im Vergleich: SG-Theorie (nicht-relativistisch) $\rho(\underline{r},t) = \psi^*(\underline{r},t)\cdot\psi(\underline{r},t) = |\psi|^2 \geq 0$!)

Multiplikation mit Elementarladung e_0

Ladungsdichte: $\rho'(\underline{r},t) = e_0\,\rho(\underline{r},t) = \frac{i\hbar e_0}{2m_0c^2}(\psi^*\dot\psi - \psi\dot\psi^*)$

Ladungsstromdichte: $\underline{j}'(\underline{r},t) = \frac{\hbar i e_0}{2m_0}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$

Bsp: Freies Teilchen, $\psi_\pm(\underline{r},t) = A_\pm\, e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}\cdot\underline{r} \mp |E|t)}$, $|E| = +\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}$

ebene Welle

$(\underline{p} = \hbar\underline{k},\ E = \hbar\omega)$

Kombiniere mit Def. von $\rho'(\underline{r},t)$

es ergibt sich: $\rho'_\pm(\underline{r},t) = \pm\frac{e_0|E|}{m_0c^2}\ \underbrace{\overbrace{\psi^*_\pm(\underline{r},t)\,\psi_\pm(\underline{r},t)}^{\text{Betragsquadrat}}}_{\geq 0}$!

plausibel,
Ladungsdichte kann auch negativ werden!

Interpretation : ψ_+ : Teilchen mit Ladung e_0

ψ_- : Teilchen mit Ladung $-e_0$

$\Rightarrow$ Hinweis auf ein Teilchen-Antiteilchen-Paar!

g) Nichtrelativistischer Grenzfall der KG-Gleichung für freie Teilchen

(klass. E-Dynamik: $\rho(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i(t))$)

Ansatz: (*) $\boxed{\psi(\underline{r},t) = \varphi(\underline{r},t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}}$ $\sim e^{i\underline{k}\cdot\underline{r} - \frac{i}{\hbar}Et}$ ebene Welle

mit $\varphi(\underline{r},t) = \varphi_0\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r} - \frac{i}{\hbar}E't}$

und $E' = E - m_0c^2$

Idee dahinter:

Im Ansatz für ψ wird also ein Zeitfaktor mit der Ruheenergie $m_0 c^2$ abgespalten.

Grund: Im nichtrelativistischen Grenzfall ist die Ruheenergie die dominierende Energie im System.

$$E_{kin}^{rel} = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \xrightarrow{\frac{v}{c} \ll 1} \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{klass. nicht-relativist. Teil}} + O(v^4)$$

$$\Rightarrow E' = E - m_0 c^2 \ll m_0 c^2$$

Zurück zu (*)

Da $E' \ll m_0 c^2$, können wir annehmen, dass $\varphi(\underline{r},t)$ nur langsam veränderlich ist mit der Zeit (im Vergleich zum Faktor, der die Ruheenergie enthält!)

(betrachte dazu 1. Zeitableitung:

$$|i\hbar \dot{\varphi}| = E' \varphi \ll m_0 c^2 \varphi$$

Verbinde diesen Ansatz (*) mit der KG-Gleichung

$$\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\underline{r},t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\underline{r},t) = \left(\Delta - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi$$

Einsetzen von (*), betrachte dazu zunächst die 2. Zeitableitung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \overset{(*)}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varphi(r,t)\, e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\dot\varphi\, e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} - \varphi\, \frac{i}{\hbar} m_0 c^2\, e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\dot\varphi - \frac{i}{\hbar}m_0c^2\varphi\right)e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}\right)$$

$$= \ddot\varphi\, e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} - \frac{i}{\hbar}m_0c^2\dot\varphi\, e^{\cdots} - \frac{i}{\hbar}m_0c^2\dot\varphi\, e^{\cdots} - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\varphi\, e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$$

$$= \left(\ddot\varphi - \frac{2im_0c^2}{\hbar}\dot\varphi - \frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\varphi\right)e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$$

Im nicht-relativistisch Grenzfall kann $\ddot\varphi$ vernachlässigt werden (da $E' = E - m_0c^2 \ll m_0c^2$)

Einsetzen:

$$\frac{1}{c^2}\left(-\frac{i}{\hbar}2m_0c^2\dot\varphi - \frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\varphi\right)e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} = \left(\Delta\varphi(r,t) - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\varphi\right)e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$$

Dividiere auf beiden Seiten durch $e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2}$ und beachte Aufhebung der Terme $\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\varphi$ auf beide Seiten

$$\Rightarrow -\frac{i}{\hbar}2m_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Delta\varphi \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi}$$

Schrödingergleichung für ein freies Teilchen (nicht-relativistisch!)

KG-Theorie ist konsistent mit SG im nicht-relativist. Grenzfall

h) Ankopplung an das elektromagnetische Feld

Erinnerung:

i) klass. Elektrodynamik:

$$\underline{B}^{(\underline{r},t)} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r},t)$$

magnet. Induktion

Vektorpotential

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\nabla \phi(\underline{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

elektr. Feld

skalares Potential

physikalische Meßgrößen
(bzw. Beträge davon)

$\underline{E}$ und $\underline{B}$ ändern sich nicht unter der Eichtransformation:

$$\underline{A} \longrightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \nabla \varphi$$

beliebige skalare Funktion $\varphi(\underline{r},t)$

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Lorentzkraft

$$\underline{F} = q\left(\underline{E} + \frac{\underline{v}}{c} \times \underline{B}\right)$$

invariant unter Eichtransformation!

ii) Ankopplung Teilchen - Feld in der klassischen Mechanik

freies Teilchen
ohne Feld : $H = \frac{\underline{p}^2}{2m}$ Hamiltonfunktion

geladenes Teilchen
im elektromagnet. Feld. $H = \frac{\left(\underline{p} - \frac{q}{c}\underline{A}\right)^2}{2m} + q\,\phi$

führt auf Bewegungsgleichung mit Lorentzkraft

iii) Ankopplung in der nicht-relativist. Quantenmechanik

Korrespondenz-Prinzip: $H \rightarrow \hat{H}$, $\underline{A} \rightarrow \underline{A}(\hat{\underline{r}},t)$

$$\phi \rightarrow \phi(\hat{\underline{r}},t)$$

$\Rightarrow$ Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{(\hat{p} - q/c\,\underline{A})^2}{2m} + q\phi \right) \psi$$

$$\Leftrightarrow \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right) \psi = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - q/c\,\underline{A} \right)^2 \psi$$

Man erkennt:
im Vergleich zur SG des Teilchens ohne elektromagnet. Feld $\left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi \right)$
wird offensichtlich ersetzt:

$$\hat{p} \longrightarrow \hat{p} - q/c\,\underline{A}(\hat{\underline{r}}, t) \xrightarrow{\text{Ortsdarstellung}} \frac{\hbar}{i} \nabla - q/c\,\underline{A}(\underline{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} - q\,\phi(\hat{\underline{r}}, t) \xrightarrow{\text{Ortsdarstellung}} \frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} - q\,\phi(\underline{r}, t)$$

Gehe nun völlig vor im relativistischen Fall:

vorher: $\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi = E^2 \psi$ mit $E^2 = \hat{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$
$\hat{p}^2 \to \Delta$

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right)^2 \psi(\underline{r}, t) = \left[\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q/c\,\underline{A} \right)^2 + m_0^2 c^2 \right] \psi(\underline{r}, t)} \quad (**)$$

KG-Gleichung mit elektromagnet. Feld

Umschreiben in Vierernotation

ohne elektromagnet. Feld $\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$ mit $\Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

$$\Leftrightarrow \left(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \qquad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$
$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

mit elektromagnet. Feld:

$$\partial^\mu \longrightarrow \underbrace{\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c} A^\mu} \quad \text{mit } A^\mu = (\phi, \underline{A})$$

skalares Potential

kanonisches Vektorpotential

check:

$$\left(\left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c} A^\mu \right) \left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \right) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar c} \phi \right)^2}_{\text{Zeitliche Komponente quadriert}} - \underbrace{\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c} \underline{A} \right)^2}_{\text{räuml. Komponente quadriert}} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

$\hat{=}$ (**) ✓

Beispiel:

KG-Gleichung für geladenes relativist. Teilchen im Coulombpotential $\left(\underline{A} = 0 \right.$
$\left. \phi \sim -\frac{1}{r} \right)$

$\rightarrow$ 2. Übungszettel

I.2. Dirac-Gleichung

Warum noch eine weitere Gleichung für den relativist. Fall

- KG-Gl. ist Differentialgl. 2. Ordnung in der Zeit (und im Raum)
  - $\rightarrow$ man benötigt Anfangsbedingungen für $\psi(t=0)$ und $\dot{\psi}(t=0)$
  - $\rightarrow$ "Dichte" aus der Kontinuitätsgleichung kann negativ werden!
- KG-Gl. enthält keinen Spin (bzw. Spin kann nicht angekoppelt werden wie in SG-Theorie)

  formal: Beschränkung auf $s=0$

Suche nun eine Diff.gleichung erster Ordnung in der Zeit, die ausserdem Teilchen mit $s=\frac{1}{2}$ (Elektronen) beschreiben kann!

Fordere ausserdem Lorentzinvarianz (d.h. die neue Gl. soll wieder in allen Inertialsystemen gelten!)

$\rightarrow$ Die Gleichung muß auch erster Ordnung im Raum sein (damit die formale Symmetrie zw. Ort und Zeit gewährleistet ist!)

Fordere schließlich Konsistenz mit der relativist. Energie-Impulsrelation.

Ansatz (für freies Teilchen)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \underbrace{\hat{H}_D}_{\text{Dirac-Operator}} \psi$$

mit $$\hat{H}_D = c\,\hat{\alpha}^i \underbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_i}_{\hat{p}_i} + \hat{\beta} m_0 c^2$$

i : Kartesische Indizes $i = 1,2,3$