Beginn 10^{15}

Gernot Schaller EW 744 (Di 13-14)

VL Do/Fr EW 203 $10^{15}-11^{45}$

Sem. Do (EW 733) $16^{15}-17^{45}$ in English

Sebastian Restrepo EW 063 → 705 (Di 15-16)

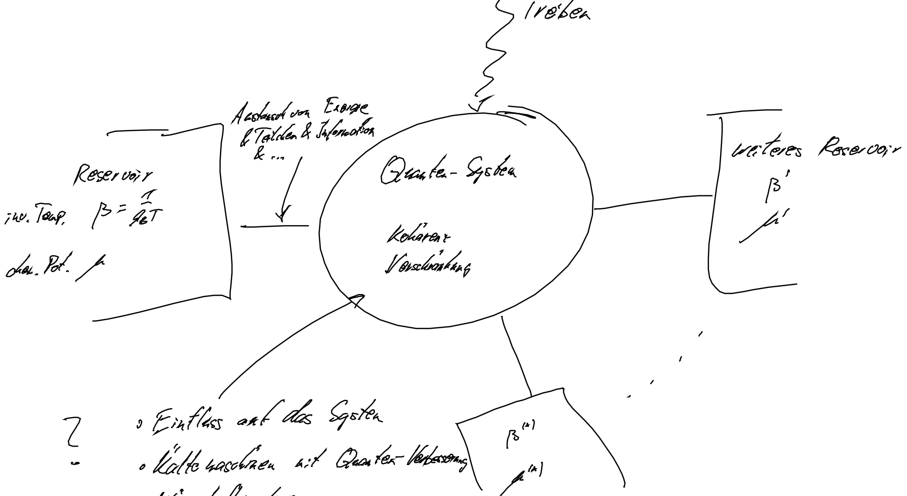
wöchentliche ÜA → + 60% der Punkte (Abgabe in 2er/3er Gruppen)

+ aktiv & regelmäßig an VL & Uebung teilnehmen

[www1.itp.tu-berlin.de/schaller/lectures.html]

gernot.schaller@tu-berlin.de

Der Plan



?
- Einfluss auf das System
- Kältemaschinen mit Quanten-Verbesserung
- Wärmekraftmaschinen
- 2. Hauptsatz der TD in Nicht-Gleichgewicht

0. Voraussetzungen

- $\hbar \to 1$ $\quad k_B \to 1$ $\quad \beta = \frac{1}{k_B T}$

$[H \cdot t] = 1$

- DM:

Wahrscheinlichkeit

$$\rho = \sum_n P_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$$

Zustand

$\sum_n P_n = 1$ $\quad \langle\Psi_n|\Psi_n\rangle = 1$

$0 \le P_n \le 1 \quad \forall n$

$\langle\Psi_m|\Psi_n\rangle \neq \delta_{mn}$

Bsp: $|\Psi_A\rangle = |0\rangle$ $\quad P_A = 1/2$

$|\Psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + |1\rangle\right]$ $\quad P_B = 1/2$

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\langle\Psi_A|\Psi_B\rangle \neq 0$

+ $Tr\{\rho\} = 1$
+ $\rho = \rho^\dagger$
+ positiv (semi)definit $\langle\Psi|\rho|\Psi\rangle \ge 0 \quad \forall |\Psi\rangle$ oder: alle EW $\lambda_n \ge 0$

+ Spektralzerlegung $\sum_n \lambda_n = 1$

$$\rho = \sum_n \lambda_n |\Phi_n\rangle\langle\Phi_n| \qquad \rho|\Phi_n\rangle = \lambda_n|\Phi_n\rangle$$

in Allg.: $\lambda_n \neq P_n$
$|\Phi_n\rangle \neq |\Psi_n\rangle$

Bsp.: $\lambda_1 = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$
$\lambda_2 = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$

- DM heißt "rein" falls gilt $\rho = \rho^2$
  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

  alle anderen sind "gemischt"

- geschlossenes Quantensystem: von-Neumann-Gleichung $\dot\rho = -i[H(t), \rho(t)]$ (Treiben/WW-Bild)

  Lösung $\rho(t) = U(t)\rho_0 U^\dagger(t)$

  Zeitentw.-Operator $\dot U(t) = -i H(t) U(t)$
  falls $H \to$ const $U(t) = e^{-iHt}$
  $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} H^n$

- ERW $\langle A\rangle = Tr\{A\rho\} = Tr\{\rho A\}$
  $= \sum_n P_n \langle\Psi_n|A|\Psi_n\rangle$

- Messung: Observable $\hat O = \hat O^\dagger = \sum_n O_n |n\rangle\langle n|$

$$\rho \xrightarrow{(n)} \rho^{(n)} = \frac{|n\rangle\langle n|\rho|n\rangle\langle n|}{P_n}$$

  $P_n = Tr\{|n\rangle\langle n|\rho\}$
  WS für Messergebnis n

- kanon. GG-Zustand
  $$\rho_c = \frac{e^{-\beta H}}{Tr\{e^{-\beta H}\}}$$

  großkanon. GG-Zustand
  $$\rho_{gc} = \frac{e^{-\beta(H-\mu N)}}{Tr\{e^{-\beta(H-\mu N)}\}}$$
  chem. Potential (μ), TZ-Operator (N)

- von-Neumann-Entropie
  $$S(\rho) = -Tr\{\rho\ln\rho\} = -\sum_n \lambda_n \ln\lambda_n$$

  kanonisch & großkanonische GG-Zustände maximieren die von-Neumann-Entropie bei vorgeg. $\langle E\rangle$ oder $\langle E\rangle, \langle N\rangle$

- Pauli-Matrizen

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\sigma^\nu)^2 = \mathbb{1}$$

$$H = \alpha(\vec n\cdot\vec\sigma) = \alpha(n_x\sigma^x + n_y\sigma^y + n_z\sigma^z) \qquad \vec n^2 = 1$$

$$(\vec n\cdot\vec\sigma)^2 =$$

$$e^{-i\alpha t(\vec n\cdot\vec\sigma)} = \cos(\alpha t)\cdot\mathbb{1} - i\sin(\alpha t)(\vec n\cdot\vec\sigma)$$

- Basis für Produkträume $C = V \otimes W$, mit Basen $|v_i\rangle$ von V und $|w_i\rangle$ von W

$$|c_{ij}\rangle = |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$$

$$N_C = N_V \cdot N_W$$

- bosonische Leiter-Operatoren

$$[b_k, b_q^\dagger] = \delta_{kq} \qquad [b_k, b_q] = 0 = [b_k^\dagger, b_q^\dagger]$$

$$\hat{N} = \sum_k b_k^\dagger b_k \qquad \text{TZ-Operator}$$

Fock-Zustände $|n_1, \ldots, n_N\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \ldots \otimes |n_N\rangle \qquad n_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\hat{N}|n_1 \ldots n_N\rangle = \left(\sum_k n_k\right) \cdot |n_1 \ldots n_N\rangle$$

- fermionische Leiteroperatoren

$$\{f_k, f_q^\dagger\} = \delta_{kq} \qquad \{f_k, f_q\} = 0 = \{f_k^\dagger, f_q^\dagger\}$$

$$\{A, B\} = AB + BA$$

$|n_1 \ldots n_N\rangle$ mit $n_i \in \{0, 1\}$

- $H = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k \rightsquigarrow \rho_{gc} = \dfrac{e^{-\beta(H - \mu N)}}{\mathrm{Tr}\{e^{-\beta(H-\mu N)}\}}$

$$\langle a_k \rangle_{gc} = \mathrm{Tr}\{a_k \rho_{gc}\} = 0 \qquad \mu \le \omega_k \quad \forall k$$

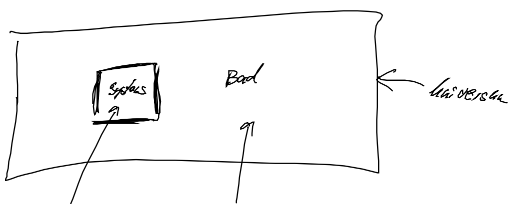
$$\langle a_k^\dagger a_q \rangle_{gc} = \mathrm{Tr}\{a_k^\dagger a_q \rho_{gc}\} = \frac{1}{e^{\beta(\omega_k - \mu)} - 1} \delta_{kq}$$

Bose-Einstein-Verteilung

- $H = \sum_k \varepsilon_k f_k^\dagger f_k$

$$\langle f_k \rangle_{gc} = 0 \qquad \langle f_k^\dagger f_q \rangle_{gc} = \frac{\delta_{kq}}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}$$

Fermi-Dirac-Verteilung



$$H = H_S + H_I + H_B$$