4.3.2. Magnetische Dipolstrahlung, el. Quadrupolstrahlung

- Hertzscher Dipol beschreibt EM Strahlung in 0. Ordnung der Multipolentwicklung des retardierten Potenzials $\underline{A}(\underline{r},t)$ im Fernfeld

$r \gg \lambda \gg a$

Beobachtungspunkt (r), Ausdehnung der Quelle (a)

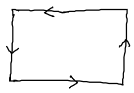
$p \sim e^{i\omega t}$ $\rightarrow \omega = c \cdot k$, $\rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu}$

(Nahfeld $\lambda \gg r \gg a$ "langsame Quelle")

Heute: Für den Fall, dass niedrigste Ordnung verschwindet (für quellfreie Stromdichten $\underline{j}(\underline{r},t)$) muss nächste Ordnung berücksichtigt werden, : $A^{(1)}(\underline{r},t)$

d.h. $\nabla_{r'}\,\underline{j}(\underline{r}',\tau) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\rho(\underline{r}',\tau) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\underline{p}}(\tau) = \int d^3r'\,\underline{r}'\dot{\rho}(r',\tau) = 0$

$$A^{(0)}(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\underline{p}}(\tau) = 0$$



$I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$

Beispiel: geschlossene Leiterschleife (Rahmenantenne)

1. Ordnung von $A(\underline{r},t)$:

aus Entwicklung des Arguments von $j(r',t')$

$$A^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\left(1 + \frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\underline{j}(\underline{r}',\tau) \qquad \tau = t - \frac{r}{c}$$

2. Term der Taylorentw. von $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

(*1) mit $(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}(\underline{r}',\tau) = \frac{1}{2}(\underline{r}'\times\underline{j})\times\underline{r} + \frac{1}{2}\left[(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j} + (\underline{r}\cdot\underline{j})\underline{r}'\right]$ (bac − cab)

und $\nabla_{r'}\left\{x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\right\} = \left[(\underline{r}\cdot\underline{r}')j_k + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{j})\right] + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\nabla\underline{j}$ (Produktregel), $\nabla\underline{j} = -\dot{\rho}$

$\int d^3r'$ $\xrightarrow{\text{Gauß}}$

(*2) $$0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\left[(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j} + (\underline{r}\cdot\underline{j})\underline{r}'\right] - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{r}'\dot{\rho}$$

$$\Rightarrow \int d^3r'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}(\underline{r}',\tau) \overset{(*1)}{=} \underbrace{\left[\frac{1}{2}\int d^3r'\,(\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}',\tau))\right]}_{\underline{m}(\tau)}\times\underline{r} + \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{r}'\dot{\rho}}_{\sim\dot{\underline{\underline{Q}}}\cdot\underline{r}}$$

$\underline{m}(\tau)$ magn. Dipolmoment

[der elektrische Quadrupoltensor $\underline{\underline{Q}}$ lässt sich schreiben als

$$\underline{\underline{Q}}(\tau) = \int d^3r' \rho(\underline{r}',\tau)\left(3\underline{r}'\otimes\underline{r}' - \underline{r}'^2 \mathbb{1}\right)$$

$$\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{r} = 3\int d^3r' \rho(\underline{r}',\tau)\,\underline{r}'(\underline{r}'\cdot\underline{r})$$
]

Also:

$$A^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(1+\frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left[\underline{m}(\tau)\times\underline{r} + \frac{1}{6}\dot{\underline{\underline{Q}}}(\tau)\cdot\underline{r}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\underbrace{\frac{1}{r^3}\underline{m}\times\underline{r} + \frac{1}{cr^2}\dot{\underline{m}}\times\underline{r}}_{\text{magn. Dipolstrahlung } A^{(1)}_m} + \underbrace{\frac{1}{6r^3}\dot{\underline{\underline{Q}}}\cdot\underline{r} + \frac{1}{6cr^2}\ddot{\underline{\underline{Q}}}\cdot\underline{r}}_{\text{el. Quadrupolstrahlung}}\right\}$$

(vgl. VL vom 1.11. statisch: $A^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\underline{m}\times\underline{r}$)

el. Dipolstrahlung
[$A^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\underline{p}}(\tau)$]

die magn. Dipolstrahlung lässt sich schreiben als

$$\nabla\times\frac{1}{r}\underline{m}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{r^3}\underline{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r} + \frac{1}{cr^2}\dot{\underline{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{(1)}_m(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\nabla\times\frac{1}{r}\underline{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}$$ magnetische Dipolstrahlung

Skalares Potenzial aus Lorentz-Eichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\underline{r},t) = -c^2\nabla\underline{A}^{(1)}_m(\underline{r},t) = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi}\nabla\cdot\left(\nabla\times\frac{1}{r}\underline{m}\right)\equiv 0$$

zeitunabhängiges $\phi(\underline{r},t) = \phi(\underline{r}) \stackrel{!}{=} 0$

o.B.d.A kein statisches Potenzial, also keine Gesamtladung

- Berechnung der Felder der magnetischen Dipolstrahlung im Fernfeld:

$$B_m(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3}\left[\ddot{\underline{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right]\times\underline{r} + \sigma\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

werden vernachlässigt → Fernfeld $\qquad r \gg \lambda \gg a$

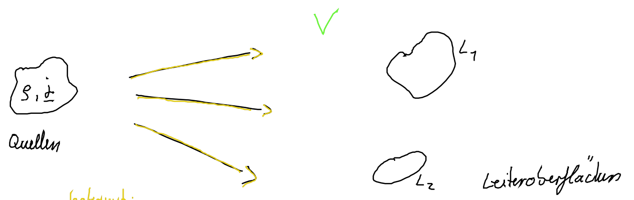
el. Quadrupolstrahlung:

$$B_{el.Q}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3}\left[\frac{1}{6}\ddot{\underline{\underline{Q}}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\underline{r}\right]\times\underline{r} + \sigma\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

- $\underline{E}$-Felder ergeben sich im Fernfeld analog zur el. Dipolstrahlung durch $\underline{E} = c\left(\underline{B}\times\frac{\underline{r}}{r}\right)$.

4.4. Wellenoptik und Beugung

Frage: Was passiert bei Wellenausbreitung in Anwesenheit von Leitern?



$\underline{E}, \underline{B}$?

bekannt: Retardierte Potenziale bestimmen $\underline{E}, \underline{B}$

Feldverteilung hinter den Hindernissen?

Gegeben: lokalisierte Quellen
Leiter L_α im Volumen

Gesucht: Wellenfeld im Außenraum

Methode: Zurückführen auf Randwertaufgabe
zu gegebenen $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$, sowie Kausalitätsbedingungen

$\boxed{\text{Annahme:}}$

$$\rho(\underline{r},t) = \rho(\underline{r})\, e^{-i\omega t} \qquad \text{o.B.d.A. wegen Fourierzerlegung}$$

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r})\, e^{-i\omega t}$$

(periodische Erregung)

$$\phi(\underline{r},t) = \phi(\underline{r})\, e^{-i\omega t}$$
$$\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r})\, e^{-i\omega t}$$

=> einsetzen in Wellengleichung $\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$$\boxed{(\Delta + k^2)\,\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})} \qquad \text{mit } |\underline{k}| := \frac{\omega}{c}$$

Helmholtzgleichung

Greensche Funktion der Wellengleichung $\Box\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$$\Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$$

allgemeine Lösung (ret. Potenzial) $\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_0^t dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\,\rho(\underline{r}',t)$ (Faltung)

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underbrace{\int_{-\infty}^{t} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, e^{-i\omega t'}}_{\int_0^\infty d\tau\, G(\underline{r}-\underline{r}',\tau)\, e^{i\omega\tau}\, e^{-i\omega t}} \rho(\underline{r}') \qquad \tau = t - t'$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r' \underbrace{\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')}_{=:\,\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')} e^{-i\omega t} \rho(\underline{r}')$$

wobei $\boxed{(\Delta + k^2)\,\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$

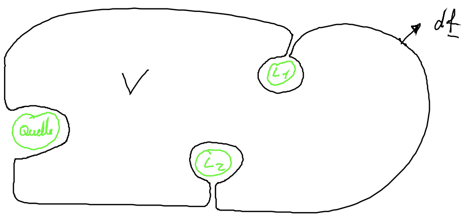
Green-Fkt. der Helmholtzgleichung

Die periodische Zeitabhängigkeit lässt sich abseparieren und $\phi(\underline{r})$ ist gegeben durch:

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\, \rho(\underline{r}')}$$

Problem: Randbedingungen für $\phi, \underline{A}$ sind im nicht-statischen Fall nicht bekannt und müssen selbstkonsistent bestimmt werden.

Skalare Kirchhoff-Identität



Greensche Satz:

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi) = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)$$

mit $\psi(\underline{r}) = \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')$
$\varphi(\underline{r}) = \phi(\underline{r})$

$$\Rightarrow \int_{\partial V} d\underline{f}\left(\phi\,\nabla_r\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') - \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\,\nabla_r\phi\right) = \int_V d^3r\,\left(\phi\,\Delta\tilde{G} - \tilde{G}\,\Delta\phi\right)$$

$\Delta\tilde{G} = -\delta - k^2\tilde{G}$ $\qquad$ $\Delta\phi = -k^2\phi - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\rho/\varepsilon_0}}$

$$\boxed{-\int_{\partial V} d\underline{f}\left[\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\,\nabla_r\phi(\underline{r}) - \phi(\underline{r})\,\nabla_r\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\right] = -\phi(\underline{r}')}$$

$\underline{r}' \in V$

$\phi(\underline{r}')$ im Inneren von V ist durch ϕ und $\nabla\phi$ auf dem Rand festgelegt falls die Greensche Funktion $\tilde{G}$ bekannt ist.

ⓐ Greenfkt des unendlichen Raumes:

Randbed. $\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \to 0$ für $r \to \infty$ $\quad\to$ retardierte Potenziale

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\!\left(\tau - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') := \int_0^\infty d\tau\, G(\underline{r}-\underline{r}', \tau)\, e^{i\omega\tau} = \boxed{\frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi\,|\underline{r}-\underline{r}'|} = \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')}$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \, e^{-i\omega t} \, \varrho(r')$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{e^{i(k|\underline{r}-\underline{r}'| - \omega t)}}{4\pi \, |\underline{r}-\underline{r}'|} \, \varrho(r')$$

beschreibt Überlagerung auslaufender Kugelwellen.

Fortsetzung folgt.