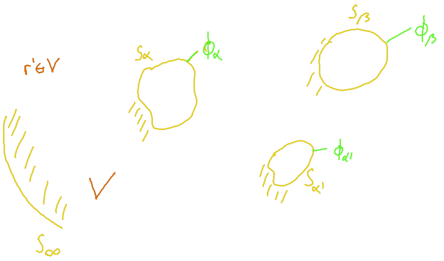
1.7. Randwertaufgabe der Elektrostatik

1. Grundaufgabe



$\boxed{\text{geg.:}}$ Leiter L_α mit Oberflächen S_α mit Potenzialen ϕ_α

$\boxed{\text{gesucht:}}$
- $\phi(\underline{r})$ als Lösung von $\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$ mit Randbedingungen
$$\phi(\underline{r})\big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$$
$$\phi(\underline{r})\big|_{S_\infty} \longrightarrow 0 \quad (r \to \infty)$$
- Q_α ? Ladungen auf Leiteroberflächen

Suchen allgemeine Lösung der Poisson Gl. $\Delta_r\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$ mit RB

$$\phi(\underline{r}) = \phi_{\text{inhom}}(\underline{r}) + \phi_{\text{hom.}}(\underline{r})$$

spezielle Lösung zu RB bei $r \to \infty : \phi(r) \to 0$

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

allg. Lösung $\rho = 0$

$\Delta\phi = 0$ [Laplace – Gleichung] mit spez. RB

Dirichlet RB

Allgemeine Lösung

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \int_V d^3r' \, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}') + \varepsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \, \nabla_{\underline{r}'} G(\underline{r}-\underline{r}')} \qquad (*)$$

Wobei die Greensche Funktion $G(\underline{r}-\underline{r}')$ die Lösung von $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ zu

RB $\quad G(\underline{r}-\underline{r}')\big|_{\substack{\underline{r}\in S_\alpha \\ \underline{r}'\in V}} = 0 \qquad$ (auf Leiteroberflächen ist ϕ = const)

$G(\underline{r}-\underline{r}')\big|_{\underline{r}\to\infty} \longrightarrow 0 \quad$ ist.

Beweis:

(1) Herleitung des Greenschen Satzes aus dem Gauß'schen Satz

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\underline{v} = \int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\underline{v}$$

mit $\underline{v} = \psi\nabla\varphi$ folgt $\int_{\partial V} d\underline{f}\,\psi\nabla\varphi = \int_V d^3r\,(\psi\Delta\varphi + \underline{\nabla\psi}\nabla\varphi)$ ①

(ψ, φ sind skalare Funktionen von r)

mit $\underline{v} = \varphi\nabla\psi$ folgt $\int_{\partial V} d\underline{f}\,\varphi\nabla\psi = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi + \nabla\varphi\underline{\nabla\psi})$ ②

=> ② − ①

$$\boxed{\int_{\partial V} d\underline{f}\,(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi) = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) \qquad \text{Greenscher Satz}}$$

→ $d\underline{f}$ zeigt aus Volumen raus.

(2) Beweis von (*)

Fahrplan: zeige (A) $\underline{\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho}$ mit RB → $\phi(\underline{r}) =$ (*) $\boxed{\text{Teil A}}$

(B) $\phi(\underline{r}) =$ (*) → $\begin{cases} \Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \text{im Inneren von } V \quad \boxed{\text{Teil 1}} \\ \phi \text{ erfüllt RB} & \phi|_{S_\alpha} = \phi_\alpha \quad \boxed{\text{Teil 2}} \end{cases}$

(A) Nutze Greenschen Satz mit $\psi(\underline{r}) := G(\underline{r}-\underline{r}')$

$\varphi(\underline{r}) := \phi(\underline{r})$

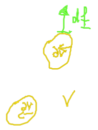
$\Delta G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

Poisson Gl. $\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$$\int_{\partial V} d\underline{f}'\,\phi(\underline{r}')\,\nabla_{r'}G(\underline{r}-\underline{r}') - \underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}'\,G(\underline{r}-\underline{r}')\,\nabla_{r'}\phi(\underline{r}')}_{0 \text{ wegen } G|_{\underline{r}'\in S_\alpha}=0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\Big[\underbrace{\int_V d^3r'\,\phi(\underline{r}')\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{\phi(\underline{r})} - \int_V d^3r'\,G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')\Big]$$

$d\underline{f}$ zeigt aus dem Leiter raus ins Volumen rein

→ Vorzeichenwechsel



$$\Rightarrow \phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'\,G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}') + \varepsilon_0\sum_{\alpha=1}^{n}\phi_\alpha\int_{S_\alpha} d\underline{f}'\,\nabla_{r'}G(\underline{r}-\underline{r}')$$

Teil A ■

$\boxed{\text{Teil B}}$ Teil 1: Anwenden von Δ_r auf (*)

$$\Delta_r\phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'\,\underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}\,\rho(\underline{r}') + \varepsilon_0\sum_{\alpha=1}^{n}\phi_\alpha\int_{S_\alpha} d\underline{f}'\,\nabla_{r'}\underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

$\underline{r}' \in S_\alpha$

$\underline{r}$: Beobachtungspunkt nicht auf Oberfläche (auf Oberfläche ist $\phi(\underline{r}) = \phi_\alpha$)

$= 0$

$$\Rightarrow \Delta_r \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$$

☒ Teil 1, Teil B

Teil 2: Überprüfen der RB

z.B. $\phi(\underline{r})\big|_{\underline{r} \in S_\beta} = \phi_\beta$

$$\phi(\underline{r})\big|_{\underline{r} \in S_\beta} = \underbrace{\int_V d^3r' \, G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r} \in S_\beta}}_{0} \rho(\underline{r}') + \varepsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \, \nabla_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r} \in S_\beta}$$

da für $\underline{r}' \in V$, $\underline{r} \in S_\beta$: $G(\underline{r}-\underline{r}') = 0$

$$= -\varepsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}' \, \phi(\underline{r}') \nabla_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r} \in S_\beta}$$

Vorzeichenwechsel damit $d\underline{f}$ vom Leiter weg zeigt

Greenscher Satz

$$= -\varepsilon_0 \left[\int_{\partial V} \underbrace{d\underline{f}' \, G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{r \in S_\beta}}_{0} \nabla_{r'} \phi + \underbrace{\int_V d^3r' \Big(\phi \underbrace{\Delta_{r'} G(r-r')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(r-r')}}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\phi(r)\big|_{r \in S_\beta}} - \underbrace{G(r-r')\Big|_{r \in S_\beta}}_{0} \Delta_{r'} \phi(r') \Big) \right]$$

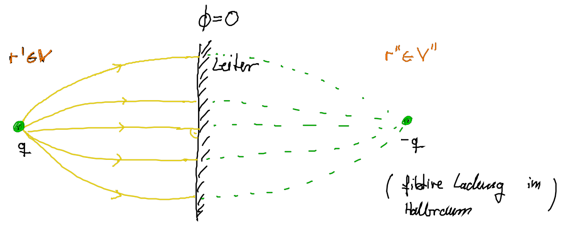
$$= \phi_\beta$$

☒ Teil 2, Teil B

[Visualisierungen der E-Dynamik www.falstad.com]

- Konstruktion der Green'schen Funktion $G(\underline{r}-\underline{r}')$ noch nötig bevor Lösung für $\overbrace{\phi(r)}^{\text{aus } ⊛}$ bekannt ist.

Bsp.:



$$\longrightarrow \quad G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|r-r'|} - \frac{1}{|r-r''|}\right)$$

Konstruktion über Methode der $\boxed{\text{Bildladungen}}$ erfüllt die Bedingungen $G(r-r')\big|_{r\in S_\beta} = 0$

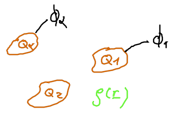
• Ladung
$$Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} df'\,\sigma(r') = \varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} \underbrace{df'\;\underline{n}'\underline{E}(r')}_{d\underline{f}'\cdot\underline{E}} = -\varepsilon_0 \int_{S_\alpha} d\underline{f}'\;\nabla_{r'}\,\phi(r')$$

Fluss durch die Oberfläche

wenn $\phi(r)$ bekannt
$\longrightarrow Q_\alpha$ bekannt.

2. Grundaufgabe: Randwertproblem mit gegebenen Ladungen Q_α [nicht wie in 1. Grundaufgabe ϕ_α]

jetzt geg: Leiter L_α $\quad \alpha = 1,\dots n$
mit Ladungen Q_α
Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$ im Außenraum



ges: $\phi(r)$, ϕ_α

Lösung: Zurückführen auf 1. Grundaufgabe durch Zusammenhang zwischen Q_α und ϕ_α

es gilt
$$Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\,\phi_\beta$$

$C_{\alpha\beta}$: Kapazitätskoeffizienten

(wegen Linearität der Poisson-gleichung)

Beweis:
$$Q_\alpha = -\varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\;\nabla_r \phi(r)$$

Lösung ⊕
$$= -\varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\;\nabla_r\left[\int_V d^3r'\,G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')\right] - \varepsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\;\nabla_r\left[\sum_\beta \phi_\beta \oint_{S_\beta} d\underline{f}'\cdot\nabla_{r'}\,G(\underline{r}-\underline{r}')\right]$$

Green'scher Satz
$$= -\varepsilon_0 \int_{L_\alpha} d^3r \int_V d^3r'\,\underbrace{\Delta_r G(r-r')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}') \,=\, 0 \;\; r\in L_\alpha,\; r'\in V}\rho(r') - \sum_{\beta=1}\phi_\beta\;\underbrace{\varepsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\,\nabla_r \oint_{S_\beta} df'\;\nabla_{r'}(G(\underline{r}-\underline{r}'))}_{=C_{\alpha\beta}}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\,\phi_\beta$$