Kurze Wiederholung

Maxwell-Gleichungen in Materie

$$(1)\quad \nabla \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0$$

$$(2)\quad \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

} WW mit Probeladungen

$$(3)\quad \nabla \cdot \underline{D} = \rho$$

$$(4)\quad \nabla \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} = \underline{j}$$

} Erzeugung der Felder

$$(5)\quad \underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$$(6)\quad \underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}$$

+ Materialgleichungen Zusammenhang $\underline{P} \Leftrightarrow \underline{E}$, $\underline{M} \Leftrightarrow \underline{B}$

einfachste Materialgleichungen $\underline{P} = \varepsilon_0 \chi \underline{E}$ (linearer Zusammenhang)

=> geschlossenes Gleichungssystem

Kapitel 1, 2 (statisch)
Kapitel 4.2
4.3.

↙ Ausbreitung (Vakuum 4.1., Materie 5.6., 5.7.)

- Grenzbedingungen an Grenzflächen
- Wellengleichung für die Felder (aus Maxwellgl. ohne freie Ladungen, Ströme durch Ohmsches Gesetz erzeugt) $\underline{j} = \sigma \underline{E}$

Telegraphengleichung

$$\Delta E - \frac{1}{c_M^2}\left(\ddot{E} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\dot{E}\right) = 0$$

-> Dispersionsrelation $k^2 = \varepsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{1}{\omega\tau}\right)$

↓ Bilanzgl., Eichung Kapitel 3

↘ Erzeugung von Feldern

- Potenziale einführen
- Wellengleichung mit RB lösen

$$\Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_P)$$

$$\Box \underline{A} = -\mu_0(\underline{j} + \underline{j}_P + \underline{j}_M)$$

-> retardierte Potenziale

-> mit RB, Beugungsphänomene beschreibbar

Optik 4.4.

$\tau := \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma}$

- Dielektrische Dispersion: - $\hat{\chi}(\omega) \in \mathbb{C}$
  Frequenzabh. Suszeptibilität
  - $\underline{E}$ und $\underline{P}$ nicht unbedingt in Phase

5.6.3. Zusammenhang von $\varepsilon'(\omega)$ und $\varepsilon''(\omega)$

$\mu_r = 1$

komplexe dielektrische Funktion

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\,\varepsilon''(\omega)$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega)$$

$$P(\omega) = \varepsilon_0\, \chi(\omega)\, \underline{E}(\omega)$$

$$\underline{D} = \varepsilon_0\, \varepsilon(\omega) \underline{E}$$

Brechungsindex

$$\tilde{n}^2(\omega) = \varepsilon(\omega)$$

$$(n + i\chi)^2 = \varepsilon(\omega)$$

- $\chi(t)$ muss kausale Funktion sein, d.h.

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} dt'\, \chi(t - t')\, \underline{E}(\underline{r}, t')$$

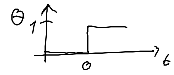
Polarisation bei t darf nicht von $t' > t$ beeinflusst werden.

also für $t - t' < 0$ muss $\chi(t - t') = 0$

(Impulsantwort)

d.h. $\chi(t) = \Theta(t)\, \chi(t)$

kausal



- Fouriertrafo von $\chi(t)$

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, \hat{\Theta}(\omega - \omega')\, \hat{\chi}(\omega')$$

da $\chi(t) = \Theta(t)\chi(t)$ also wegen Kausalität.

$$\hat{\Theta}(\omega) := \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt\, e^{i\omega t - \sigma t}$$

$$= -\lim_{\sigma \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega - \sigma}$$

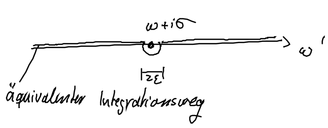
σ: konvergenzerzeugender Faktor

da $\int_0^{\infty} e^{i\omega t} dt = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\omega}[\sin\omega t - i\cos\omega t + i]$

nicht konvergiert.

$$= \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega - i\sigma}\, \hat{\chi}(\omega')$$

- Integral über reelle Achse mit Pol bei $\omega' = \omega + i\sigma$



Zerlegung: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega'-\omega} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon} + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty}\right]}_{} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega'-\omega} + \underbrace{\int_{\circlearrowleft} d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega'-\omega}}_{\text{Nebenrechnung}}$

"Hauptwert" $\displaystyle P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\hat{\chi}}{\omega'-\omega}$

- für Integrale die auf beschränkten Bereich weder im Riemannschen Sinne noch im Lebesgue'schen Sinne integrierbar sind.

Nebenrechnung

$$\int_{\circlearrowleft} d\xi \frac{f(\xi)}{\xi} = f(0)\int_{\circlearrowleft} \frac{d\xi}{\xi} \underset{\substack{\xi=\varepsilon e^{i\varphi} \\ d\xi = i\xi\, d\varphi}}{=} f(0)\, i\int_0^{\pi} d\varphi = i\pi f(0)$$

(halbes Residuum)

$$\Rightarrow \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\left(P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega'-\omega} + \frac{1}{2}\hat{\chi}(\omega)\right)$$

Zerlegung in Re und Im mit $\mathrm{Re}\,\hat{\chi}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - 1$
$\mathrm{Im}\,\hat{\chi}(\omega) = \varepsilon''(\omega)$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) - 1 &= \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega'-\omega} \\ \varepsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega'-\omega} \end{aligned}}$$

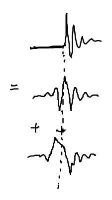
Kramers - Kronig Relation.

Absorptionsspektrum $\varepsilon''(\omega)$ ist bestimmbar aus $\varepsilon'(\omega)$ oder umgekehrt.

anschauliche Begründung:

Fouriertrafo einer reellen Funktion $f(x) = f_u + f_g$ (gerade + ungerade Anteile)

$\hat{f}(\omega)$: $\mathrm{Re}\,\hat{f}(\omega)$ von geraden Anteilen
$\mathrm{Im}\,\hat{f}(\omega)$ von ungeraden Anteilen

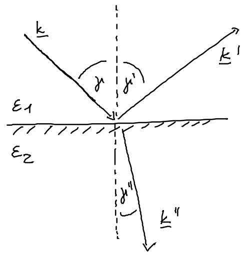


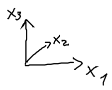
konstruiere kausale Funktion über $\chi(t) = \underbrace{\mathrm{sign}(t)\cdot f_u}_{\text{gerade}} + f_u$

$F(f_u) = \mathrm{Im}\,\hat{\chi}(\omega)$

$F(\mathrm{sign}(t)\cdot f_u) = \mathrm{Re}\,\hat{\chi}(\omega)$

5.7. Brechung und Reflexion





Wellenausbreitung in geschichteten Medien
- ungedämpfte Wellen

$\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ d.h. kein Imaginärteil $\varepsilon_i'' = 0$

$\frac{\omega}{c_1} = |\underline{k}| =$

einfallende Welle : $\underline{E} = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$

reflektierte Welle : $\underline{E}' = \underline{E}_0' \, e^{i(\underline{k}'\underline{r} - \omega' t)}$

transmittierte Welle : $\underline{E}'' = \underline{E}_0'' \, e^{i(\underline{k}''\underline{r} - \omega'' t)}$

Grenzbedingungen

$\underline{n} \times (\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}) = 0$

$\underline{n} \cdot (\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) = 0$ (keine freien Ladungen)

$n \times (H^{(1)} - H^{(2)}) = 0$ (" " Ströme)

$\underline{n} \cdot (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) = 0$

$\rightarrow$ $E_1 + E_1' \big|_{x_3=0} = E_1'' \big|_{x_3=0}$

für $t=0$:

$E_{01} e^{ik_1 x_1} + E_{01}' e^{ik_1' x_1} = E_{01}'' e^{ik_1'' x_1}$

$\hookrightarrow \boxed{k_1 = k_1' = k_1''}$

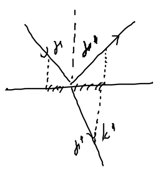
für $\underline{r}=0$:

$E_{01} e^{-i\omega t} + E_{01}' e^{-i\omega' t} = E_{01}'' e^{-i\omega'' t}$

$\hookrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \omega = \omega' = \omega'' \\ E_{01} + E_{01}' = E_{01}'' \end{array}}$

$\Rightarrow$

$|\underline{k}| = \frac{\omega}{c_1}$



$\underbrace{|k|}_{\omega/c_1} \sin\gamma = E_{01} = |k'| \sin\gamma'$

$= \underbrace{|k''|}_{\omega/c_2} \sin\gamma''$

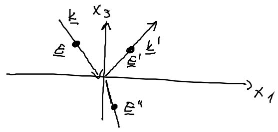
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \sin\gamma = \sin\gamma' \\[1em] \dfrac{\sin\gamma''}{\sin\gamma} = \dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{n_1}{n_2} \end{array}}$$

Reflexionsgesetz

Brechungsgesetz

Bestimmung der Amplituden

(a) Polarisation von $\underline{E} \perp$ Einfallsebene



Einfallsebene (x_3, x_1)

$$E_{01} = E_{01}' = E_{01}'' = 0$$

$$E_{03} = E_{03}' = E_{03}'' = 0$$

(1) $\boxed{E_{02} + E_{02}' = E_{02}''}$

mit $\underline{B}_0 = \frac{c}{\omega}(\underline{k} \times \underline{E}_0) = \frac{c}{\omega} E_{02} \begin{pmatrix} -k_3 \\ 0 \\ k_1 \end{pmatrix}$ folgt für Tangentialkomp von $\underline{B}$

$$B_{01} + B_{01}' = B_{01}''$$

$\rightarrow k_3 E_{02} + k_3' E_{02}' = k_3'' E_{02}''$

mit Reflexionsgesetz $k_3 = -k_3'$ $\Rightarrow \boxed{k_3 (E_{02} - E_{02}') = k_3'' E_{02}''}$ (2)

(1) und (2) $\rightarrow k_3 (E_{02} - E_{02}') = k_3'' (E_{02} + E_{02}')$

$\rightarrow \boxed{\frac{E_{02}'}{E_{02}} = \frac{k_3 - k_3''}{k_3 + k_3''}}$, $\boxed{\frac{E_{02}''}{E_{02}} = \frac{2k_3}{k_3 + k_3''}}$

reflektierte Welle

Amplituden Anteil der gebrochenen Welle

drücke k_3'' durch Brechungswinkel μ'' aus $\quad k_3'' = |\underline{k}''| \cos\mu'' = |\underline{k}| \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \cos\mu''$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E_{02}'}{E_{02}} &= \frac{\cos\mu \sin\mu'' - \sin\mu \cos\mu''}{\cos\mu \sin\mu'' + \sin\mu \cos\mu''} = \frac{\sin(\mu'' - \mu)}{\sin(\mu'' + \mu)} \\ \frac{E_{02}''}{E_{02}} &= \frac{2 \sin\mu'' \cos\mu}{\sin(\mu'' + \mu)} \end{aligned}}$$

Fresnel'sche Formeln