Achtung: Raumänderung am Freitag 15.11. : HO110 statt EW203

Wdh: Feldenergie

Kontinuitätsgleichung $\boxed{\nabla\cdot\underline{S} + \frac{\partial}{\partial t}w = -\underline{j}\cdot\underline{E}}$

Poynting Vektor $\underline{S} = \underline{E}\times\underline{H}$

Energiestromdichte

Energiedichte

$w := \frac{1}{2}(\underline{E}\,\underline{D} + \underline{B}\,\underline{H})$

Bemerkungen

- Feldenergie ist keine Erhaltungsgröße!
- $\underline{S}\neq 0$ heißt nicht unbedingt, dass Energie aus V herausströmt.

$\underline{E} = \begin{pmatrix}E\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $\underline{S} = \begin{pmatrix}0\\-EH\\0\end{pmatrix}$

konstant in $\underline{r}, t$

$\nabla\cdot\underline{S} = 0$

(analog zu Magnetostatik wo $\nabla\cdot\underline{j} = 0$ gilt)

Beispiel: Ohmsches Gesetz $\underline{j} = \sigma\underline{E}$ mit konstanter Leitfähigkeit $\sigma > 0$

[phänomenologisches Materialgesetz, gilt in Metallen und Halbleitern für hinreichend kleine Felder $\underline{E}$]

$\longrightarrow$ Energiebilanz $\frac{\partial}{\partial t}w + \nabla\cdot\underline{S} = -\sigma\underline{E}^2 < 0$

d.h. stets Verlust von Feldenergie

(Konsequenz des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik)

Zeitumkehrinvarianz:

$t \to -t$

$\underline{j} \to -\underline{j}$

$\underline{E} \to \underline{E}$

Ohm'sches Gesetz ist nicht T-invariant!

σE^2 wird als Joulsche Wärme im Leiter dissipiert (irreversibel)

- Antennenstrahlung

$\underline{j}$ in der metallischen Antenne ist dem Wechselfeld E außerhalb entgegengesetz.

$\longrightarrow$ Energiegewinn des Feldes

3.5. Impulsbilanz

Aus den Maxwell-Gleichungen folgt eine weitere Bilanzgleichung für den Impulstransport durch das el.-magn. Feld

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\times\underline{B}) = \underset{\operatorname{rot}\underline{H} - \underline{j}}{\dot{\underline{D}}}\times\underline{B} + \underline{D}\times\underset{-\operatorname{rot}\underline{E}}{\dot{\underline{B}}}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times (\nabla \times \underline{B}) - \underline{j} \times \underline{B} - \varepsilon_0 \underline{E} \times (\nabla \times \underline{E})$$

Wir benutzen die Vektorumformung (Beweis in Übung)

$$\underset{a}{\underline{B}} \times (\underset{b}{\nabla} \times \underset{c}{\underline{B}}) = \frac{1}{2} \nabla (\underline{B} \cdot \underline{B}) - (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B}$$

$$= \nabla \cdot \left\{ \mathbb{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{B}) - \underline{B} \otimes \underline{B} \right\} + \underline{B} \, \underbrace{(\nabla \cdot \underline{B})}_{0}$$

"Produktregel"

wobei $\mathbb{1}$ Einheitstensor 2. Stufe

$\underline{B} \otimes \underline{B}$ das Tensorprodukt (dyadisches Produkt) $\qquad \underline{B} \otimes \underline{B} = \begin{pmatrix} B_1 B_1 & B_1 B_2 & B_1 B_3 \\ B_2 B_1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

und $\nabla \cdot \{ \}$ die Divergenz eines Tensors $\underline{\underline{T}}$: $(\nabla \cdot \underline{\underline{T}})_\beta := \partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \sum_\alpha \partial_\alpha T^{\alpha\beta}$

"Divergenz der Zeile β"

Analog:

$$\underline{E} \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla \cdot \left\{ \mathbb{1} \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{E}) - \underline{E} \otimes \underline{E} \right\} + \underline{E} \, \underbrace{(\nabla \cdot \underline{E})}_{\rho/\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\underline{D} \times \underline{B}) + \nabla \cdot \left\{ \mathbb{1} \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \underline{B}^2 \right) - \varepsilon_0 \underline{E} \otimes \underline{E} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \otimes \underline{B} \right\} = \underbrace{-(\rho \cdot \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})}_{\text{Kraftdichte } \underline{f}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} = -(\rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})$$

Impulsdichte $\underline{g} := \underline{D} \times \underline{B}$ $\qquad \left[\rightarrow \underline{g} = \varepsilon_0 \mu_0 \underline{S} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right]$

Impulsstromdichte $\underline{\underline{T}} := \mathbb{1} \frac{1}{2} (\underline{E}\underline{D} + \underline{B}\underline{H}) - \underline{E} \otimes \underline{D} - \underline{B} \otimes \underline{H}$

in Komponenten

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\underline{E}\underline{D} + \underline{B}\underline{H}) - E_\alpha D_\beta - B_\alpha H_\beta$$

Stromdichte in α-Richtung der β-Komponente der Impulsdichte

$\mathrm{Sp}\, \underline{\underline{T}} = \sum_\alpha T_{\alpha\alpha} = w$ (Energiedichte)

[Einstein'sche Summenkonvention $x^\alpha x_\alpha := \sum_\alpha x^\alpha x_\alpha$]

$\underline{\underline{T}}$ ist symmetrisch : $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} T_{\alpha\beta} = -f_\beta$$

beschreibt Impulsaustausch zwischen Feld und geladenen Teilchen

- Gesamtimpuls ist bei geschlossenem System Feld + Teilchen erhalten. Feldimpuls ist keine Erhaltungsgröße.
- Eine analoge Bilanzgleichung gilt für die Drehimpulsdichte des Felds.

3.6. Eichinvarianz

Darstellung der Felder $\underline{E}, \underline{B}$ durch Potenziale $\phi(\underline{r}, t)$, $\underline{A}(\underline{r}, t)$

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \quad , \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

$\boxed{\text{Frage:}}$ allgemeine Transformation $\phi \to \phi'$, $\underline{A} \to \underline{A}'$ die $\underline{E}, \underline{B}$ invariant lässt?

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \overset{!}{=} -\nabla\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}'$$

$$\underline{B} = \nabla\times\underline{A} \overset{!}{=} \nabla\times\underline{A}' \qquad \longrightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \nabla G(r,t) \quad (\text{da } \nabla\times\nabla G = 0)$$

$$\Rightarrow -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \overset{!}{=} -\nabla\phi' - \frac{\partial}{\partial t}(\underline{A} + \nabla G)$$

$$\nabla\left(\phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G\right) = 0$$

$$\Rightarrow \phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G = g(t) \qquad \text{unabhängig von } \underline{r}!$$

Mit $F(\underline{r},t) := G(\underline{r},t) - \int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')$

ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{A}'(\underline{r},t) &= \underline{A}(\underline{r},t) + \nabla F(\underline{r},t) \\ \phi'(\underline{r},t) &= \phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}F(\underline{r},t) \end{aligned}}$$

mit beliebiger Eichfunktion $F(\underline{r},t)$

- Alle physikalischen Aussagen müssen eichinvariant sein!
  (Aber nicht nur $\underline{E}, \underline{B}$ sondern auch $\phi, \underline{A}$ sind physikalisch relevant z.B. Aharonov Bohm Effekt.)

- Durch $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$, $\underline{B} = \nabla\times\underline{A}$ sind die homogenen Maxwell Gl. bereits erfüllt:

$$\nabla\times\underline{E} = -\underbrace{\nabla\times\nabla\phi}_{0} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\times\underline{A}}_{\underline{B}} = -\dot{\underline{B}} \quad ✓$$

$$\nabla\cdot\underline{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\underline{A}) = 0 \quad ✓$$

Die Umkehrung gilt auch: $\nabla\cdot\underline{B} = 0 \longrightarrow \exists \underline{A}: \underline{B} = \nabla\times\underline{A}$

eingesetzt in

$$\nabla\times\underline{E} = -\dot{\underline{B}} = -\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \Rightarrow \nabla\times\left(\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = 0$$

$\Downarrow$ d.h. $\exists\phi$:

$$\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} = -\nabla\phi$$

- Lagrange-Funktion zur Herleitung der Maxwell-Gl. aus dem Hamilton'schen Prinzip kann gefunden werden durch Forderung der Eichinvarianz.

3.6.1. Lorentz Eichung

- Wähle nun eine Eichung, so dass die inhomogenen Maxwell-Gleichungen besonders einfach werden:

Ziel: Entkopplung der DGLn für $\underline{A}$ und ϕ.

⊛ Ansatz: $\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r},t) = 0$

a) $-\nabla \cdot \underline{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$ inh. Maxwell

$\nabla \cdot \left(\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} \right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$ Def. $\underline{E}$ über $\underline{A}, \phi$

$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \underline{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$

⊛ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta \phi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$

d'Alembert Operator

$\Box := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$\Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$

b) $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{B} - \varepsilon_0 \dot{\underline{E}} = \underline{j}$ inh. Maxwell

$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times \underline{A})}_{\nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A}} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} \right) = \mu_0 \underline{j}$ Def. $\underline{E}, \underline{B}$ über $\underline{A}, \phi$

$\Delta \underline{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} - \nabla \underbrace{\left(\nabla \cdot \underline{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi \right)}_{0 \text{ für Lorentz-Eichung}} = -\mu_0 \underline{j}$

$$\boxed{\begin{aligned} \Box \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \\ \Box \phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \end{aligned}}$$

inhomogene Wellengleichungen

äquivalent zu den 4 Maxwell Gleichungen!